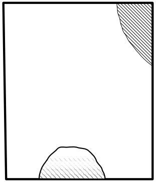


Gömbi koordi

Vektormező és skalármező

Skalármező

Gradiens képzés

Derékszögű koordinátarendszer alkalmazásakor

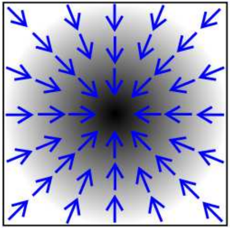
$$\text{grad } f = \vec{\mathbf{e}}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{\mathbf{e}}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{\mathbf{e}}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

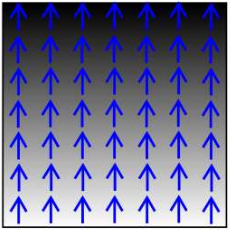
Vektor, amely az adott pontban a legnagyobb változás irányába mutat, nagysága a változás nagyságát jelenti. Nabla vektor használatával

$$\text{grad } f = \nabla f$$

illetve

$$\text{grad } f = \left(\vec{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot f$$





Gradiens képzés - példa

Feladat

Számítsuk ki az $\phi = 17x - \frac{2xy}{z} + y^2z^3$ függvény gradiens vektorát az $A(2;0;-1)$ pontban!

$$\nabla\phi = \left(\vec{\mathbf{e}}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{e}}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(17x - \frac{2xy}{z} + y^2z^3\right) =$$

$$= \vec{\mathbf{e}}_x\frac{\partial}{\partial x}\left(17x - \frac{2xy}{z} + y^2z^3\right) + \vec{\mathbf{e}}_y\frac{\partial}{\partial y}\left(17x - \frac{2xy}{z} + y^2z^3\right) +$$

$$+ \vec{\mathbf{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(17x - \frac{2xy}{z} + y^2z^3\right) =$$

$$= \vec{\mathbf{e}}_x\left(17 - \frac{2y}{z}\right) + \vec{\mathbf{e}}_y\left(\frac{-x}{z} + 2yz^3\right) + \vec{\mathbf{e}}_z\left(\frac{2xy}{z^2} + 3y^2z^2\right)$$

$$\nabla\phi = \vec{\mathbf{e}}_x\left(17 - \frac{2y}{z}\right) + \vec{\mathbf{e}}_y\left(\frac{-4}{-1} + 0\right) + \vec{\mathbf{e}}_z\left(\frac{0}{1} + 0\right) = 17\vec{\mathbf{e}}_x + 4\vec{\mathbf{e}}_y$$

Iránymenti derivált

Iránymenti derivált

A f skalármező $\vec{\mathbf{r}}$ pontbeli, $\vec{\mathbf{n}}$ (normalizált) vektor által meghatározott iránymenti deriváltja :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{\mathbf{n}}} = \vec{\mathbf{n}} \cdot \text{grad } \phi$$

ahol $\vec{\mathbf{n}}$ az adott irányba mutató egységvektor $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{r}}_0/|\vec{\mathbf{r}}_0|$, ha $\vec{\mathbf{r}}_0$ a keresett irányba mutató tetszőleges vektor.

Példa

Az előző feladatban adott skalármező ($\phi = 17x - \frac{2xy}{z} + y^2 z^3$) esetén a vizsgált $A(2;0;-1)$ pontban határozzuk meg az origó felé mutató iránymenti deriváltat!

Iránymenti derivált

Felhasználva az előző feladat eredményét :

$$\text{grad } \phi = 17\vec{\mathbf{e}}_x + 4\vec{\mathbf{e}}_y$$

Az A-ból az origóba mutató egységvektor

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_{AO}}{|-\vec{\mathbf{r}}_{AO}|}$$

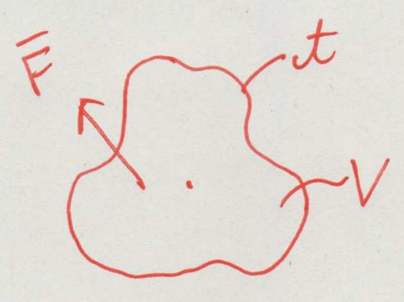
$$\vec{\mathbf{r}}_{AO} = \vec{\mathbf{0}} - \vec{\mathbf{r}} = -2\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_z; \qquad \vec{\mathbf{n}} = \frac{-2\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_z}{|-2\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_z|} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\phi = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{e}}_z\right) \cdot (17\hat{\mathbf{e}}_x + 4\hat{\mathbf{e}}_y) = -\frac{34}{\sqrt{5}}$$

Divergencia

Bázisoktól független definíciója

$$\text{div } \vec{\mathbf{F}} = \lim_{\mathcal{A} \to \vec{\mathbf{r}}} \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{F}} d\vec{\mathbf{A}}$$



ahol $\mathcal{A}$ az $\vec{\mathbf{r}}$ pontot körülölelő, egyszeresen összefüggő tartományt bezáró felület, a tartomány térfogata V, és $\int \vec{\mathbf{F}} d\vec{\mathbf{A}}$ pedig $\vec{\mathbf{F}}$-nek az $\mathcal{A}$ felületre vonatkozó felületi integrálja (fluxusa).
Derékszögű koordinátarendszer alkalmazása esetén

$$\text{div } \vec{\mathbf{F}} = \nabla \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Divergencia (cont.)

Egyéb bázisok (más koordinátarendszerek) esetén a bázisfüggetlen definíció alapján lehet meghatározni a divergencia kifejezését.

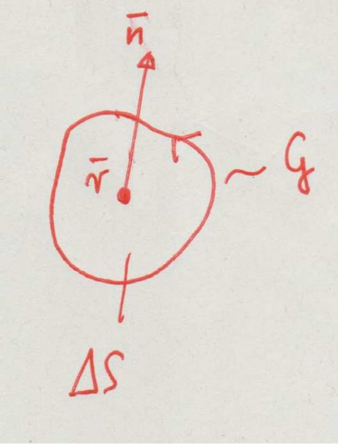
Divergencia - példa

Feladat

Rotáció

A zárt görbére vett vonalmenti integrál alapján a rotáció definíciója

$$(\mathrm{rot}\ \vec{\mathbf{F}})_n = (\mathrm{rot}\ \vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta S_n \to 0} \left[\frac{1}{\Delta S_n} \oint_{\mathcal{G}_n} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \right]$$



Rotáció - példa

Feladat

Rotáció - példa

Feladat

Milyen feltételeket jelent $\vec{\mathbf{F}}$-re nézve,ha $\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = 0$ kijelentést tesszük?

$$\vec{\mathbf{e}}_x\left(\frac{\partial F_y}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial y}\right)+\vec{\mathbf{e}}_y\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+\vec{\mathbf{e}}_z\left(\frac{\partial}{\partial F_x}y-\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y};\qquad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z};\qquad \frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Ha $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla\phi$ esetén, amikor

$$F_x=-\frac{\partial \phi}{\partial x};\qquad F_y=-\frac{\partial \phi}{\partial y};\qquad F_z=-\frac{\partial \phi}{\partial z}\text{ ezek teljesülnek.}$$

(Potenciálfüggvény és térerősség kapcsolata).

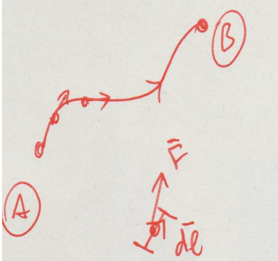
$$\text{Mert }\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z};\qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x};\qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Vonalmenti integrál

Vektorfüggvény ($\vec{\mathbf{F}}$) tetszőleges $\mathcal{G}$ görbe mentén vett integrálját az alábbi módon értelmezzük

$$\int_A^B \vec{\mathbf{F}} d\vec{\ell} = \int_a^b F \cos\theta \; d\ell$$

ahol θ az $\vec{\mathbf{F}}$ és d$\vec{\ell}$ által bezárt szöget jelöli. Az integrált az A pontból indulva a B pontig tartó $\mathcal{G}$ görbe mentén számítjuk ki.



Vonalmenti integrál (cont.)

Fizikai alkalmazása : a $\mathcal{G}$ görbe mentén $\vec{\mathbf{F}}$ erő hatására mozgó testen végzett munkát számítjuk ki.

$$W = \int_{\mathcal{G}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\ell}$$

Példa a vonalmenti integrálra

Feladat

Számítsuk ki a testen végzett munkát, ha az origóból (A) az $\vec{\mathbf{r}} = 3\hat{\mathbf{e}}_x$ pontba (B) vezető egyenes mentén jut el és az erőtér $\vec{\mathbf{F}} = 3\hat{\mathbf{e}}_x + 2\hat{\mathbf{e}}_y$ állandó nagyságú és irányú!

Megoldás

A keresett $A \to B$ menti munka

$$W_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{\mathbf{F}} \vec{\mathbf{dr}}$$

módon számítható. Az elemi elmozdulás kifejezése szükséges, hogy a skaláris szorzás elvégezhető legyen.
A $(0,0,0) \to (3,0,0)$ során (az egyenes mentén) $\vec{\mathbf{dr}} = \hat{\mathbf{e}}_x \cdot dx$

$$W_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{\mathbf{F}} \vec{\mathbf{dr}} = \int_0^3 3\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \cdot \mathrm{dx} = \int_0^3 3\mathrm{dx} = 3 \cdot 3 = 9$$

Másik példa

feladat

Oldjuk meg az előző feladatot, ha az $A(-3,0,0)$-ból $B(3,0,0)$-be az I. és II. síknegyedben lévő félkör mentén haladunk!

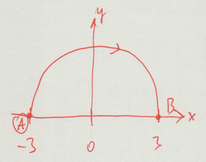
Alkalmazva az ábra jelöléseit :

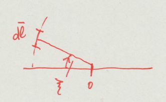
$$d\vec{\ell} = d\ell \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \sin\xi + \hat{\mathbf{e}}_y \cdot \cos\xi)$$

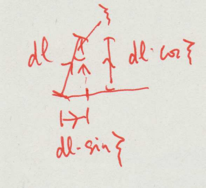
ahol

$$d\ell = R \cdot d\xi = 3 \cdot d\xi$$

és $R = 3$ a félkör sugara.
A paraméter $0 \leq \xi \leq \pi$ tartományon fut végig.







Másik példa (cont.)

Az integrál

$$I = \int_{(A)}^{(B)} \vec{\mathbf{F}} \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = \int_0^{\pi} (F_x \hat{\mathbf{e}}_x + F_y \hat{\mathbf{e}}_y) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_x \cdot R \cdot \mathrm{d}\ell \, \sin\xi d\xi + \hat{\mathbf{e}}_y \cdot R \cdot \mathrm{d}\ell \, \cos\xi)$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} F_x \cdot R \cdot \sin\xi d\xi = 3 \cdot 3 \cdot \int_0^{\pi} \sin\xi d\xi = 9 \cdot [-\cos\xi]_{\xi=0}^{\xi=\pi} = 9 \cdot (\cos 0 - \cos(\pi)) = 18$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} F_y \cdot R \cdot \cos\xi d\xi = 2 \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} \cos\xi d\xi = 6 \cdot [\sin\xi]_{\xi=0}^{\xi=\pi} = 6 \cdot (\sin 0 - \sin(\pi)) = 0$$

$$I = I_1 + I_2 = 18$$

Ha most A-B utat a koordinátatengelyen tesszük meg, akkor is ugyanezt az eredményt kapjuk. Ami csak a speciális vektortér miatt adódik!
Lásd a Stokes-tétel alkalmazásával.

Felületi integrál

A vektortér tetszőleges felületi integrál általánosan előforduló alakja

$$\int_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{v}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

ahol $\vec{\mathbf{v}}$ egy vektorfüggvény, $d\vec{\mathbf{A}}$ az elemi felületelem normális vektora (egységnyi hosszúságú vektor, amely a felületet határoló görbe irányításával jobbcsavart alkot).
Zárt felület esetén a jelölés

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{v}}\, d\vec{\mathbf{A}}$$

A vektortér $\mathcal{A}$-re vett felületi integrálját az adott felületre vett fluxusnak is nevezzük.

Felületi integrál számítása 1.

Feladat

Számítsuk ki az $\vec{\mathbf{F}} = x^2\ \hat{\mathbf{e}}_x + y^2\ \hat{\mathbf{e}}_y + z^2\ \hat{\mathbf{e}}_z$ vektormező felületi integrálját (fluxusát) az (x=2) síkban elhelyezkedő $(-2 \leq y \leq 2,\ -3 \leq z \leq 1)$ négyzetre!

$$d\vec{\mathbf{A}} = dy\ dz\ \hat{\mathbf{e}}_x; \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = x^2\ dy\ dz = 4dy\ dz$$

$$S = \int_A \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_{-2}^{2} \int_{-3}^{1} 4dz\ dy = 4 \cdot \int_{-2}^{2} (1 - (-3))dy = 16 \cdot (2 - (-2)) = 64$$

Térfogati integrál

A térfogati integrál a legtöbbször egy skalármező (pl. térbeli töltéseloszlás) integrálását jelenti. Ekkor

$$\int_{\mathcal{V}} f dV$$

jelöli a műveletet.

A feladat esetleg meglévő szimmetriái alapján lehet a megfelelő koordinátarendszert kiválasztani, amelyben ezek után az elemi térfogatelemet kell kifejezni.

Pl. $dV = dx\ dy\ dz$ vagy $dV = r^2\ \sin\vartheta\ dr\ d\vartheta\ d\varphi$ vagy $dV = \varrho\ d\varrho\ d\varphi\ dz$.

Térfogati töltéssűrűség integrálása

Feladat

Tekintsük az alábbi

$$\varrho(\vec{\mathbf{r}}) = \varrho_0 \cdot r$$

töltéssűrűség eloszlást (skalármezőként értelmezhetjük)!
Határozzuk meg az R sugarú gömbön (G_R) belül található össztöltést! (r az origótól mért távolság, ϱ_0 az origóbeli töltéssűrűség)

A skalármező gömbszimmetrikus. (Bár ez most mellékes.) A keresett teljes töltés kifejezése

$$Q_G = \int_{G_R} \varrho(r) \mathrm{dV}$$

A feladatban adott térfogat gömbszimmetrikus, ezért célszerűen áttérünk a megoldás során gömbi koordinátákra (r, φ, ϑ). Az elemi térfogatelem nagysága (a parallelepipedon térfogata):

$$dV = r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta d\varphi dr$$

A gömbi koordinátákat alkalmazva

$$Q_G = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varrho_0 \cdot r \cdot r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta\, d\varphi\, dr =$$

$$= \varrho_0 \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \right\} \cdot \left\{ \int_0^\pi \sin(\vartheta)\, d\vartheta \right\} \cdot \left\{ \int_0^R r^3\ dr \right\} =$$

$$= \varrho_0 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^4}{4} = \varrho_0 \cdot \pi \cdot R^4$$

Megjegyzendő, hogy ha a töltéssűrűség konstans lenne ($\varrho(\vec{\mathbf{r}}) = \varrho_0$), akkor az eredményül

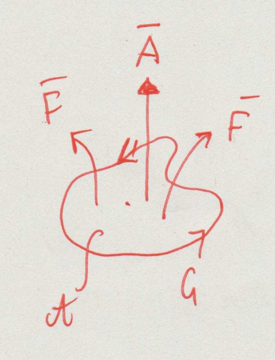
$$Q_0 = \varrho_0 \frac{4\pi R^3}{3}$$

adódna.

Stokes-tétel

A $\mathcal{G}$ görbe által határolt, nyílt $\mathcal{A}$ felület esetén

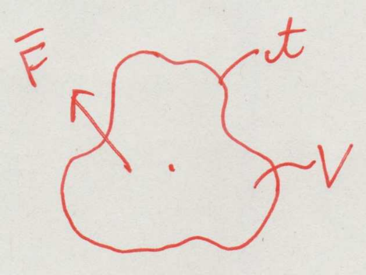
$$\oint_{\mathcal{G}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{\mathcal{A}} \text{rot } \vec{\mathbf{F}} d\vec{\mathbf{A}}$$



Gauss-Osztrogradszkij tétel

A $\mathcal{V}$ térfogatot körülvevő $\mathcal{A}$ felület esetén

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \vec{\mathbf{F}} dV = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\ \vec{\mathbf{F}} dV$$



Gauss-Osztrogradszkij tétel (cont.)

Feladat

Számítsuk ki az $\vec{\mathbf{F}} = x^2\ \vec{\mathbf{e}}_x + y^2\ \vec{\mathbf{e}}_y + z^2\ \vec{\mathbf{e}}_z$ vektormező felületi integrálját az (1;1;1) középpontú, egységnyi oldalhosszúságú, koordinátatengelyekkel párhuzamos oldallapú kocka felületén vett fluxusát!

$$\nabla\vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 2y + 2z$$

Gauss-tétel alkalmazása

Célszerű derékszögű koordinátarendszert alkalmazni ($dV = dx\ dy\ dz$)

$$S_F = \iiint_V (2x + 2y + 2z)dV = \int_{1/2}^{3/2} \int_{1/2}^{3/2} \int_{1/2}^{3/2} (2x + 2y + 2z)dx\ dy\ dz =$$

$$= \int_{1/2}^{3/2} \int_{1/2}^{3/2} \left[(2x + 2y)z + 2\frac{z^2}{2}\right]_{1/2}^{3/2} dx\ dy = \int_{1/2}^{3/2} \int_{1/2}^{3/2} (2x + 2y + 2)\ dxdy =$$

$$= \int_{1/2}^{3/2} \left[(2x + 2)y + 2\frac{y^2}{2}\right]_{1/2}^{3/2} dx = \int_{1/2}^{3/2} (2x + 4)dx =$$

$$= \left[2\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{1/2}^{3/2} = 2 + 6 - 2 = 6$$