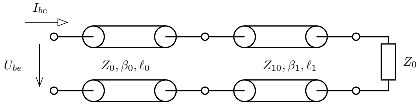
Elektromágneses terek alapjai # 6.

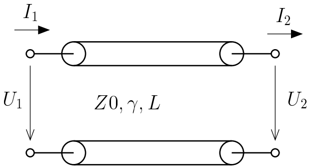
Távvezetékek 1-2.

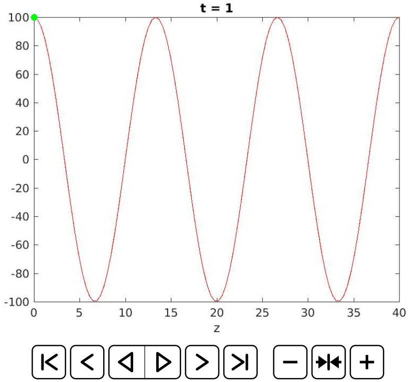
Példák

Reichardt András

2019. november 21-22.





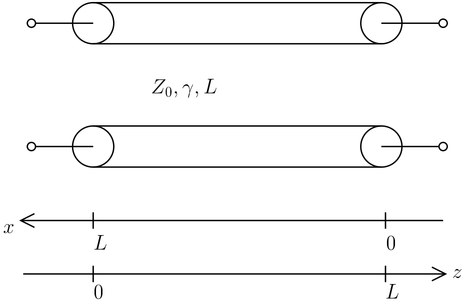

t = 1
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
0
5
10
15
20
25
30
35
40
z

Elmélet

A távvezetéken $z = 0$ jelöli a távvezeték primer oldalát, $z = L$ a távvezeték végét. Távvezeték tetszőleges pontján a feszültség és áram időfüggésének kifejezése :

$$u(t) = \mathfrak{Re}\left\{U(z) \cdot e^{j\omega t}\right\} = \mathfrak{Re}\left\{\left(U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}\right) \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

$$i(t) = \mathfrak{Re}\left\{I(z) e^{j\omega t}\right\} = \mathfrak{Re}\left\{\left(\frac{U_0^+}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma x}\right) e^{j\omega t}\right\}; I^+ = \frac{U^+}{Z_0}; I^- = -\frac{U^-}{Z_0}$$



Komplex amplitudók alkalmazásával

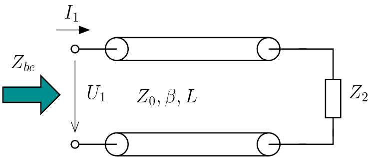
$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{U(z)e^{j\omega t}\right\}; i(t) = \mathrm{Re}\left\{I(z)e^{j\omega t}\right\}$$

Ezek helyfüggése (*z-t a távvezeték elejétől mérve !*) :

$$U(z) = U_2 \;\cosh(\gamma(\ell - z)) + Z_0 I_2 \sinh(\gamma(\ell - z)) \tag{1}$$

$$I(z) = \frac{U_2}{Z_0} \sinh(\gamma(\ell - z)) + I_2 \cosh(\gamma(\ell - z)) \tag{2}$$

Speciális esetek



Bemeneti impedancia ($z = 0$ helyen)

$$U_1 = U_2 \cosh(\gamma\ell) + Z_0 I_2 \sinh(\gamma\ell); I_1 = \frac{U_2}{Z_0} \sinh(\gamma\ell) + I_z \cosh(\gamma\ell)$$

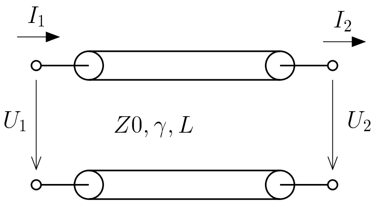
$$Z_{be} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cosh(\gamma\ell) + Z_0 I_2 \sinh(\gamma\ell)}{\frac{U_2}{Z_0} \sinh(\gamma\ell) + I_z \cosh(\gamma\ell)} = Z_0 \, \frac{Z_2 \cosh(\gamma\ell) + Z_0 \sinh(\gamma\ell)}{Z_2 \sinh(\gamma\ell) + Z_0 \cosh(\gamma\ell)}$$

ideális távvezeték : $\gamma = j\beta$
Ezért $\sinh(\gamma\ell) = j\sin(\beta\ell); \cosh(\gamma\ell) = \cos(\beta\ell)$
Bemeneti impedancia :

$$Z_{be} = Z_0 \, \frac{Z_2 + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_2 \tan(\beta\ell)}$$

Feladat

Egy meghatározott paraméterekkel rendelkező ($\gamma = 1.1 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j79.9^\circ}$ km^{-1}, $Z_0 = (818 - j\ 145.7)\Omega$) távvezeték végén lévő fogyasztót $U_2 = 90kV$ feszültséggel kell táplálni.
A fogyasztó árama $I_2 = 400\ e^{-j30^\circ} A$. A távvezeték hossza $\ell = 20km$.
Számítsuk ki, a távvezeték bemeneti pontjain a feszültség és az áramerősség értékét!



Megoldás

Lánc karakterisztika :

$$U_1 = U_2 \cosh(\gamma\ell) + Z_0 I_2 \sinh(\gamma\ell)$$
$$I_1 = \frac{U_2}{Z_0}\sinh(\gamma\ell) + I_2\cosh(\gamma\ell)$$

$$\gamma\ell = 2.2\ 10^{-2} e^{j79.9^\circ}; \qquad |\gamma\ell| \text{ kicsi}$$

$$\sinh(\gamma\ell) \approx \gamma\ell = 2.2\ 10^{-2} e^{j79.9^\circ}$$

$$\cosh(\gamma\ell) \approx 1 + \frac{1}{2}(\gamma\ell)^2 = 1 + j0.837$$

$$Z_0 \sinh(\gamma\ell) \approx Z_0\gamma\ell = 18.32\ e^{j69.8^\circ}\Omega$$

$$\frac{\sinh\gamma\ell}{Z_0} \approx \frac{\gamma\ell}{Z_0} = j26.4\cdot 10^{-4} S$$

Behelyettesítve a lánc karakterisztikába

$$U_1 = U_2 \cosh(\gamma\ell) + Z_0 I_2 \sinh(\gamma\ell) = 94 \cdot 10^3 \; e^{j3.85^\circ} V$$

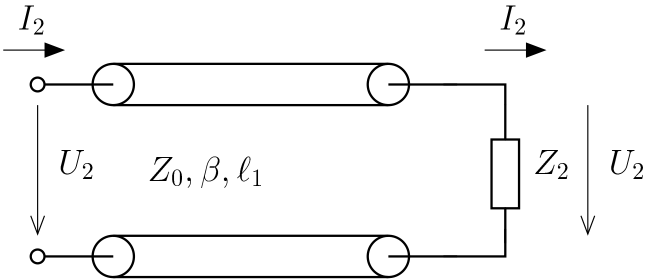
$$I_1 = \frac{U_2}{Z_0} \sinh(\gamma\ell) + I_2 \cosh(\gamma\ell) = 399.5 \; e^{-j9.6^\circ} A$$

bemeneti pontokon a fázis eltolódás az áram és a feszültség között

$$\varphi_1 = 3.85^\circ - (-9.6^\circ) = 13.45^\circ$$

Feladat

Egy $Z_0 = 160\Omega$ hullámellenállású, légszigetelésű, $\ell_1 = 500m$ hosszuságú ideális távvezeték lezáró impedanciája $Z_2 = (100 + 10j)\Omega$. A bemeneti pontokon a feszültség $U_1 = 100V$. Mekkora a terhelésen a feszültség és az áram értéke, ha $f = 1MHz$.



Megoldás

A fázistényező

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\ 10^6}{3\ 10^8} = \frac{2}{3}\pi \cdot 10^{-2} m^{-1}$$

$$\beta\ell = \frac{2}{3}\pi \cdot 10^{-2} 500 = 3\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos(\beta\ell) = -0.5; \qquad \sin(\beta\ell) = -0.866$$

Bemeneti feszültség a lánckarakterisztikából kifejezve

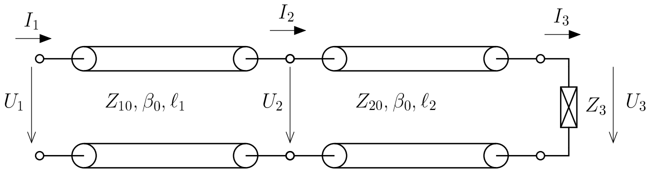
$$U_1 = U_2 \left(\cos(\beta\ell) + j \frac{Z_0}{Z_2} \sin(\beta\ell) \right)$$

$$U_2 = \frac{U_1}{\cos(\beta\ell) + j \frac{Z_0}{Z_2} \sin(\beta\ell)} = 66\ e^{j245.05^\circ} V$$

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_2} = 0.627\ e^{j239.25^\circ} A$$

Feladat

Egy $Z_{10} = 100\Omega$ hullámellenállású $\ell_1 = 10m$ hosszuságú ideális, légszigetelésű távvezetékhez $Z_{20} = 160\Omega$ hullámellenállású, $\ell_2 = 0.5m$ hosszuságú ideális, légszigetelésű távvezeték csatlakozik.
Ennek végén $Z_3 = (120 + 40j)\Omega$ értékű lezáró impedancia van.
Határozzuk meg U_3 és I_3 értékét, ha $U_1 = 60V$ és $f = 50MHz$!



Megoldás

$$U_1 = \left[U_3 \cosh(\gamma\ell_2) + Z_{20} I_3 \sinh(\gamma\ell_2)\right] \cosh(\gamma\ell_1) + \\ + Z_{10}\left[I_3 \cosh(\gamma\ell_2) + \frac{U_3}{Z_{20}} \sinh(\gamma\ell_2)\right] \sinh(\gamma\ell_1)$$

ideális vezetékekről lévén szó ($\gamma = j\beta$)

$$U_1 = U_3\left[\cos(\beta\ell_2) + j\frac{Z_{20}}{Z_3}\sin(\beta\ell_2)\right]\cos(\beta\ell_1) + \\ + U_3 Z_{10}\left[\frac{1}{Z_3}\cos(\beta\ell_2) + \frac{1}{Z_{20}} j\sin(\beta\ell_2)\right] j\sin(\beta\ell_1)$$

$$U_1 = U_3\left\{\cos(\beta\ell_2)\cos(\beta\ell_1) - \frac{Z_{10}}{Z_{20}}\sin(\beta\ell_2)\sin(\beta\ell_1) + \\ + \frac{j}{Z_3}\left[Z_{20}\sin(\beta\ell_2)\cos(\beta\ell_1) + Z_{10}\cos(\beta\ell_2)\sin(\beta\ell_1)\right]\right\}$$

itt $\lambda = c/f = 6m$, $\beta = 2\pi/\lambda = \pi/3\ m^{-1}$

$$\beta\ell_1 = \frac{10}{3}\pi; \quad \beta\ell_2 = \frac{\pi}{6}$$

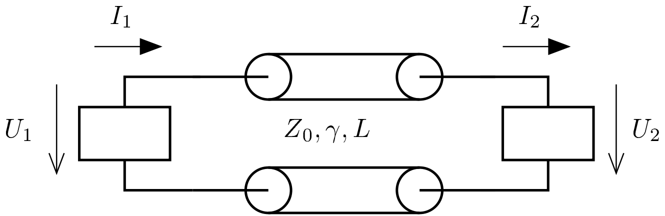
$$U_1 = -U_3(0.417 + 0.864j)$$

$$U_3 = \frac{-60}{0.417 + 0.864j} = 62.3\ e^{j115.65^\circ} V$$

$$I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = 0.493\ e^{j97.24^\circ} A$$

Feladat

Feladat Két végén kétpólussal lezárt ideális távvezeték feszültség és árameloszlása



$$U_1 = 10V;\; U_2 = 9\; e^{-j1,8} V;\; Z_0 = 75\Omega; \beta = 2,856\; m^{-1}; \ell = 1m$$

- Határozzuk meg az áram és feszültség amplitúdó eloszlását a távvezeték mentén ($I(z)$ ill. $U(z)$)!
- Számítsuk ki a feszültség amplitúdó maximális (U_{max}) és minimális (U_{min}) értékét, valamint ezek helyét (z_{max} ill. z_{min}) a távvezeték mentén!
- Adjuk meg mindkét oldali lezárás áramának amplitúdóját (I_1 ill. I_2)!

Megoldás 1. - Amplitúdók

Feszültség és áramamplitúdó kifejezése a jobbra és balra haladó feszültséghullámok amplitúdójával :

$$U(z) = U^{+}\ e^{-j\beta z} + U^{-}\ e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}\left(U^{+}\ e^{-j\beta z} - U^{-} e^{j\beta z}\right)$$

Peremfeltételek :

$$U(0) = U^{+} + U^{-} = U_1 \qquad U(\ell) = U^{+} e^{-j\beta\ell} + U^{-} e^{j\beta\ell} = U_2$$

alapján :

$$U^{+} = 24,5\ e^{j0,51} V; \quad U^{-} = 17{,}08\ e^{-j2,24} V$$

Feszültségeloszlás

Feszültségeloszlás (álló/haladó hullámok alakban)

$$U(z) = U^+ \ e^{-j\beta z} + U^- \ e^{j\beta z} =$$
$$= (U^+ - U^-)e^{-j\beta z} + U^-(e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}) = (U^+ - U^-)e^{-j\beta z} + 2U^- \cos(\beta z)$$

ahol $(U^+ - U^-)e^{-j\beta z}$ haladó hullámot, míg $2U^- \cos(\beta z)$ állóhullámot jelent.
Más felírás (most megfelelőbb) :

$$U(z) = U^+ \ e^{-j\beta z} + U^- \ e^{j\beta z} =$$
$$= U^+ \left(e^{-j\beta z} + \frac{U^-}{U^+} e^{j\beta z} \right) = U^+ e^{-j\beta z} \left(1 + \frac{U^-}{U^+} e^{j2\beta z} \right)$$

$$|U(z)| = |U^+| \cdot \left| 1 + \frac{U^-}{U^+} e^{j\beta z} \right|$$

adatainkkal

$$\frac{U^-}{U^+} = 0{,}695 \cdot e^{-j2{,}816}$$

$$|U(z)| = |U^+| \cdot \left|1 + 0{,}695 e^{j(2\beta z - 2{,}816)}\right|$$

Az amplitúdó-fazor szögének változása : $\varphi = 2\beta z - 2{,}816$

- maximális feszültségamplitúdó

$$|U_{max}| = (1 + 0{,}695)|U^+| = 41{,}59V$$

$$\varphi = m\ 2\pi; z_{max} = \frac{2m\pi + 2{,}816}{2\beta} = 1{,}593m;\ 2{,}693m; \ldots$$

- minimális feszültségamplitúdó

$$|U_{min}| = (1 - 0,695)|U^+| = 7{,}48V$$

$$\varphi = \pi + k \cdot 2\pi; z_{min} = \frac{(2k+1)\pi + 2{,}816}{2\beta} = 1{,}043m;\ 2{,}143m; \ldots$$

A távvezetéken adott frekvenciára vonatkozó vezetett hullámhossza (guided wavelength):

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = 2{,}2m$$

A primer oldali lezárás áramának komplex amplitúdója :

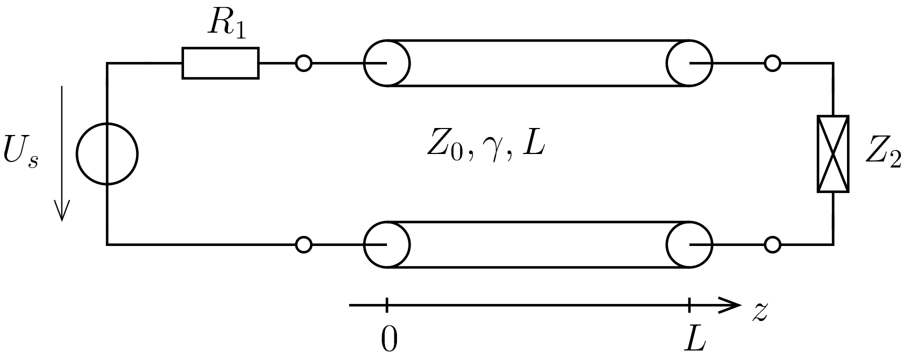
$$I_1 = \frac{1}{Z_0}\left(U^+ - U^-\right) = 0{,}548\ e^{j0{,}71}A$$

$$I_2 = \frac{1}{Z_0}\left(U^+ e^{-j\beta\ell} - U^- e^{j\beta\ell}\right) = 0{,}551\ e^{-j2{,}23}A$$

Feladat

Feladat Ideális légszigetelésű ($c = 3 \cdot 10^8 m/s$) távvezeték, esetén $Z_0 = 75\Omega$, $f = 5$ MHz. A távvezeték hossza $\ell = 200$ m. Primer oldalon a feszültséggenerátorral ($u(t) = 100\ V \cos(\omega t)$, $R_1 = 12\Omega$) lezárt, a szekunder oldalon $Z_2 = (100 + j \cdot 200)\Omega$.

- Határozzuk meg a (feszültségre vonatkozó) r_2 reflexiós tényezőt a távvezeték végén (szekunder oldalon)!
- Határozzuk meg a feszültség $U(z)$ amplitúdójának eloszlását a távvezeték mentén!
- Keressük meg a feszültség amplitúdójának maximális és minimális értékét!
- Határozzuk meg a σ állóhullám arányt!



- reflexiós tényező a távvezeték lezárásánál :

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{100 + j200 - 75}{100 + j200 + 75} = 0,6288 + j0,4248 = 0,7584\ e^{j0{,}595}$$

reflexiós tényező a távvezeték elején : $r_e = r_2 e^{-j2\beta\ell} = 0{,}7584\ e^{j2{,}69}$

- feszültségre és áramra felírható (határ)feltételi egyenletek :

$$U^+ + U^- = U_1 = U_0 - R_1 Z_1 \text{ és } I_1 = \frac{1}{Z_0}\left(U^+ - U^-\right)$$

$$U^- = U^+ \; r_2 \; e^{-j\beta 2\ell}$$

$$U^+ \left[\left(1 + r_2 e^{-j2\beta\ell}\right) + \frac{R_1}{Z_0}\left(1 - r_2 e^{-j2\beta\ell}\right)\right] = U_0$$

$$U^+ = 153,9 \; e^{-j0,44} V; \quad U^- = 116,7 \; e^{j2,25} V$$

$$U(z) = U^+\left(e^{-j\beta z} + r_e e^{j\beta z}\right) = U^+ e^{j\varrho/2}\left(e^{-j(\beta z + \varrho/2)} + |r_2| e^{j(\beta z + \varrho/2)}\right) =$$

$$= 153,9 e^{j2,25}\left(\underbrace{\left(1 - |r_2|\right)}_{0,2416} e^{-j(\beta z + \varrho/2)} + \underbrace{2|r_2|}_{1,517} \cos\left(\beta z + \varrho/2\right)\right)$$

ahol r_e a távvezeték elején mérhető reflexiós tényező ($r_e = |r_2| e^{j\varrho}$ alakban)

Vegyük észre

- $|U_{min}| =?$ $|U_{max}| =?$

$$U(z) = U^{+} e^{-j\beta z} \left(1 + |r_2| e^{j(2\beta z + \varrho)}\right)$$

$$|U|_{max} = |U^{+}|(1 + |r_2|) = 270,6V$$

$$|U|_{min} = |U^{+}|(1 - |r_2|) = 37,17V$$

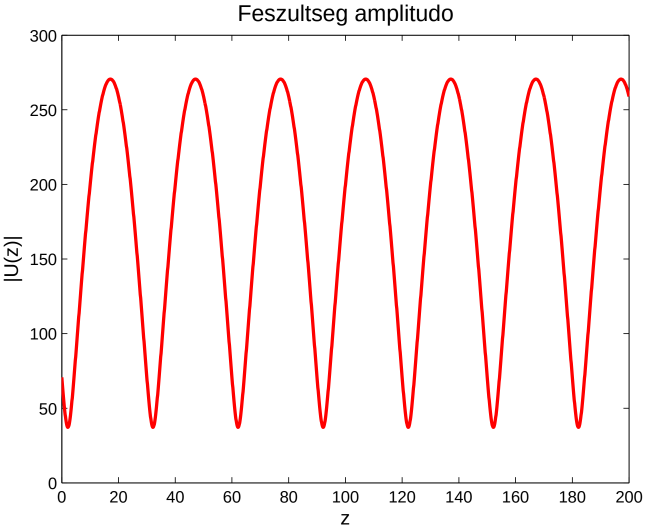
- $$\frac{|U|_{max}}{|U|_{min}} = \frac{1 + |r_2|}{1 - |r_2|} = \sigma$$

  állóhullámarány : $\sigma = 7,28$

- $$|U|_{max} = |U|^{+} + |U|^{-}$$

  $$|U|_{min} = |U|^{+} - |U|^{-}$$

Feszültség amplitúdó



Feladat megfogalmazása

Feladat A $Z_0 = 50\Omega$, $v = 3 \cdot 10^8 m/s$ (légszigetelésű), $\ell = 100$ m adatokkal jellemzett ideális távvezetéket primer oldalon $U_1 = 100V$ amplitúdójú, $f = 50$ MHz frekvenciájú forrással gerjesztjük. A szekunder oldalon $C = 31,8$ pF kapacitású kondenzátorral zárjuk le.

- Adjuk meg a reflexiós tényezőt a lezárás oldalán!
- Határozzuk meg a feszültség jobbra és balra haladó hullámának amplitúdóját, valamint a feszültség amplitúdójának eloszlását a távvezeték mentén!
- Keressük meg a maximális és minimális feszültség amplitúdókat! (Értelmezzük az eredményeinket!)

- r_2 reflexiós tényező

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 31,8\ 10^{-12}} = -j100\Omega$$

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{-j100 - 50}{-j100 + 50} = -\frac{1+2j}{1-2j} = e^{-j0{,}927}$$

A kapacitással történő lezárás esetében nem meglepő az egységnyi reflexiós tényező!

- $U^+ =?$, $U^- =?$, $U(z) =?$

$$U(z) = U^+ e^{-j\beta z} + U^- e^{j\beta z}$$

$$\frac{U^-}{U^+} = r_2 e^{-j2\beta\ell} = e^{-j(2\beta\ell - 0{,}927)} = e^{-j210{,}36} = e^{-j3{,}021} = -0{,}99 - 0{,}1196j$$

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = 1,05\frac{1}{m}$$

$$U^+ + U^- = U^+(1 + r_2 e^{-2j\beta\ell}) = 100V \rightarrow$$

$$U^+ = \frac{100}{-0,0072 - j0,1196} = 834{,}5 \cdot e^{j1{,}5108} V; [86{,}56°]$$

$$U^- = 834{,}5\ e^{j1{,}5108} V[-86,56°]$$

$$U(z) = 834{,}5 \left(e^{-j(\beta z - 1{,}5108)} + e^{j(\beta z - 1{,}5108)} \right) V = 1669 \cos\left(\beta z - 1{,}5108\right) V$$

- maximum- és minimum pontok

$$|U_{max}| = 1669V; \qquad \beta z_{max} - 1{,}5108 = k\pi$$

$$z_{max} = \frac{k\pi + 1{,}5108}{\beta} = 4{,}44m;\ \ 7{,}44m; \ldots$$

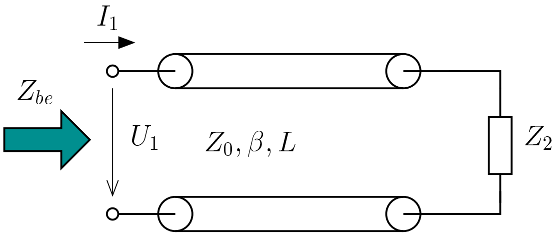
$$|U_{min}| = 0V; \qquad \beta z_{min} - 1,5108 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$z_{min} = \frac{(2k+1)\pi/2 + 1{,}5108}{\beta} = 2{,}94m;\ \ 5{,}94m; \ldots$$

feszültség a lezáráson : $U_2 = U(z = 100m) = 1492V$

Feladat

Egy $Z_0 = 50\Omega$ hullámellenállású koaxiális kábel hossza $\ell = 255cm$. A dielektrikum relatív permittivitása $\varepsilon_r = 2.25$.
A lezáró impedancia értéke $Z_2 = (40 + j10)\Omega$.



Mekkora a bemenő impedancia értéke $f = 500Mhz$ esetén?

Megoldás

$Z_0 = 50\Omega$, $\ell = 255cm$, $\varepsilon_r = 2.25$, $Z_2 = (40 + 10j)\Omega$, $f = 500MHz$
$f = 500Mhz = 5 \cdot 10^8 Hz$ a kábel már ideálisnak tekinthető

$$Z_{be} = Z_0 \, \frac{Z_2 + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_2 \tan(\beta\ell)}$$

dielektrikum a hullámhosszt megrövidíti ($\Lambda < \lambda$

$$\Lambda = \frac{c_{kozeg}}{f} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{c_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2.25} \cdot 5 \cdot 10^8} = 0.4m = 40cm$$

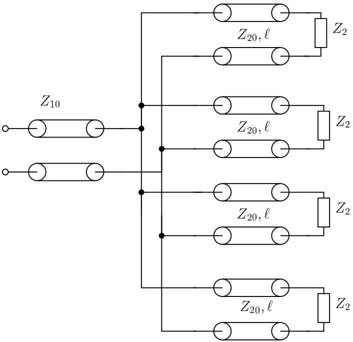
$$\beta\ell = \frac{2\pi}{\Lambda}\ell = 2\pi\frac{255}{40} = 12.75 \cdot \pi$$

$$\tan(\beta\ell) = \tan(12.75\pi) = -1$$

$$Z_{be} = 50 \, \frac{40 + 10j - j50}{50 - j(40 + 10j)} = (38.5 - j7.7)\Omega$$

Feladat

Négy antenna $\ell = 1.25m$, $Z_{20} = 200\Omega$, párhuzamosan kapcsolt tápvonalon, antennák táplálási ellenállása $Z_2 = (180 + 40j)\Omega$. Közös betáp $Z_{10} = 50\Omega$. Számítsuk ki az állóhullám arányt! ($\varepsilon_r = 2.56$, $f = 100MHz$)



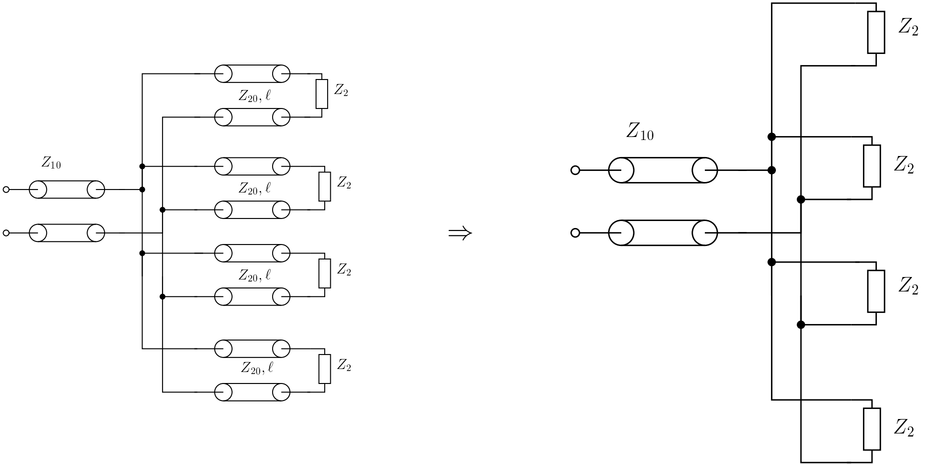
Megoldás

A tápvonal az antenna impedanciáját transzformálja a tápvonal bemenetére (Z_1). Z_1 : az antenna impedanciájával lezárt tápvonal bemenő ellenállása

$$Z_1 = Z_{209a} \, \frac{Z_2 + jZ_{20} \tan(\beta\ell)}{Z_{20} + jZ_2 \tan(\beta\ell)}$$

$$\beta\ell = \frac{2\pi}{\Lambda}\ell = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\frac{c_0}{f}} = 2\pi\sqrt{\varepsilon_r} f \frac{l}{c_0} = \frac{1}{3}2\pi\sqrt{2.56}\ell$$

$$Z_1 = 200\frac{(180+40j) + j200 \tan(2\pi\sqrt{2.56}\cdot 1.25/3)}{200 + j(180+40j)\tan(2\pi\sqrt{2.56}1.25/3)} = (253 - j14.7)\Omega$$


Z_{10}
Z_{20}, ℓ
Z_2
Z_{20}, ℓ
Z_2
Z_{20}, ℓ
Z_2
Z_{20}, ℓ
Z_2
$\Rightarrow$
Z_{10}
Z_2
Z_2
Z_2
Z_2

A négy antenna betáp párhuzamosan van kapcsolva, ezért

$$Z_{1e} = \frac{1}{4}(253 - j14.7)\Omega = (63.25 - j3.675)\Omega$$

reflexió koefficiens a közös betápon

$$\overline{r} = \frac{Z_{1e} - Z_{10}}{Z_{1e} + Z_{10}} = \frac{63.25 - j3.675 - 50}{63.25 - j3.675 + 50}$$

$$r = |(\overline{r})| = 0.1215$$

állóhullám arány :

$$\sigma = \frac{1+r}{1-r} = \frac{1+0.1215}{1-0.1215} = 1.381$$

Az állóhullámarány definíciója : $\mathbf{r} = \frac{|U|_{max}}{|U|_{min}}$.

Feladat

Fejezzük ki a távvezeték hullámimpedanciáját és terjedési együtthatóját rövidzárási és üresjárási impedanciájával!
Alkalmazásként tekintsük az alábbi feladatot!
Egy $\ell = 20km$ hosszúságú távvezeték üresjárási és rövidzárási bemeneti impedanciája $f = 1kHz$ frekvencián $Z_u = 536\ e^{-j89.74^\circ}\Omega$ illetve $Z_r = 169e^{-j69.74^\circ}\Omega$. Számítsuk ki a távvezeték hullámparamétereit!

Megoldás

Bemeneti impedancia :

$$Z_{be} = Z_0 \, \frac{Z_2 + jZ_0 \tanh(\gamma\ell)}{Z_0 + jZ_2 \tanh(\gamma\ell)}$$

Speciális lezárások esetén a bemeneti ellenállás értéke : (Z_2 a távvezeték végén lévő lezárás

$$Z_2 = 0(\text{rövidre zárt távvezeték}) : Z_{1,r} = Z_0 \tanh(\gamma\ell)$$

$$Z_2 = \infty(\text{nyitott végû vezeték}) : Z_{1,u} = \frac{Z_0}{\tanh(\gamma\ell)}$$

$$Z_0\sqrt{Z_r \cdot Z_u}; \quad \text{illetve} \quad \tanh\gamma\ell = \sqrt{\frac{Z_r}{Z_u}}$$

A számpélda adatai :
$\ell = 20km,\ f_0 = 1kHz,\ Z_u = 536\ e^{-j89.74^\circ}\Omega,\ Z_r = 169e^{-j69.74^\circ}\Omega$

$$Z_0 = 300e^{-j10^\circ}\Omega;$$

$$\gamma = \frac{1}{\ell} \cdot \mathrm{atanh}\sqrt{\frac{Z_r}{Z_u}} = 25.6 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j51.6^\circ} m^{-1}$$

más módon :

$$K = \tanh(\gamma\ell) = \frac{e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}}{e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell}}; 2\gamma\ell = \log\frac{1-K}{1+K}$$

Feladat

A mikrohullámú frekvenciatartományban nem lehet a szokásos módszerekkel impedanciát mérni. Az impedancia mérése azonban történhet állóhullámmérővel, amely mûszer a híradástechnikában használatos legnagyobb frekvenciákra is kivitelezhető.
Az állóhullámmérő egy Z_0 hullámellenállású tápvonal, amelynek mentén feszültséget lehet mérni. A mérendő Z impedancia vagy közvetlenül az állóhullámmérőhöz csatlakozik, vagy egy szintén Z_0 hullámellenállású tápvonalon keresztül. Az impedancia meghatározásához két mérést végzünk.
Először megmérjük terhelt állapotban a σ állóhullámarányt és megjelöljük egy feszültségminimum helyét.
Másodszor Z helyére rüvidzárat helyezünk és megmérjük a feszültségminimum helyének Δ eltolódását. Ezen adatokból az ismeretlen Z impedancia kiszámítható.

Az ismeretlen impedancia értéke meghatározható, ha a reflexió koefficiens értéke ismert.

$$\mathbf{r} = r\ e^{j\vartheta},\ \text{ahol } r = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}$$

A feszültség függése a helytől (távvezeték végén $x = 0$)

$$U(x) = U^{+}\left(e^{-j\beta x} + \mathbf{r}\cdot e^{j\beta x}\right) = U^{+}\left(e^{-j\beta x} + re^{j(\beta x+\vartheta)}\right) =$$
$$= U^{+}\left((1-r)e^{-j\beta x} + r(e^{-j\beta x} + e^{j(\beta x+\vartheta)})\right) =$$
$$= U^{+}\left[(1-r)e^{-j\beta x} + r\left\{e^{j\vartheta/2}e^{-j(\beta x+\vartheta/2)} + e^{j(\beta x+\vartheta/2)}\right\}\right)$$

A feszültség időtől való függését is figyelembe véve

$$u(x,t) = U(x)e^{j\omega t} = U^{+}\left[(1-r)e^{j(\omega t-\beta x)} + 2re^{j(\omega t+\vartheta/2)}\cos(\beta x + \vartheta/2)\right)$$

Az első tag egy haladóhullámot, a második egy állóhullámot ír le.

Feszültség minimum ott van ($x = x_1$), ahol az állóhullám értéke zérus :

$$\beta x_1 + \frac{\vartheta}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}; \qquad \beta x_1 = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}$$

Rövidzárás esetén :

$$u(x,t) = -2jU^+ \sin(\beta x) e^{j\omega t}$$

állóhullám az $x = x_2$ helyen lesz

$$x_2 = n\pi$$

Így

$$\beta x_1 - \beta x_2 = \beta\Delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}; \qquad \vartheta = \pi - 2\beta\Delta$$

reflexió koefficiens értéke :

$$\mathbf{r} = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} e^{j\vartheta} = -\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} e^{-j2\beta\Delta}$$

A keresett impedancia értéke :

$$Z = Z_0 \frac{1 + r}{1 - r} = Z_0 \frac{1 - \frac{\sigma-1}{\sigma+1} e^{-j2\beta\Delta}}{1 + \frac{\sigma-1}{\sigma+1} e^{-j2\beta\Delta}}$$

Feladat

Számítsuk ki, hogy $\ell = 30cm$ hosszuságu egyik végén rövidre zárt, másik végén nyitott tápvonal milyen frekvenciákon rezonáns ($\varepsilon_r = 1$).

Megoldás

A tápvonal rezonáns, ha a hossz a hullámhossz negyedének páratlan számú többszöröse

$$\ell = (2n+1)\frac{\Lambda}{4}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Lambda = \frac{4}{2n+1}\ell$$

Rezonáns frekvencia

$$f = \frac{c}{\Lambda} = \frac{c}{\ell}\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$f = \frac{3 \cdot 10^8}{0.3}\left(\frac{n}{2} + 0.25\right) = (500n + 250)MHz$$

Ennek megoldásai : $f_0 = 250MHz$, $f_1 = 750Mhz$, $f_2 = 1250Mhz$ és így tovább.