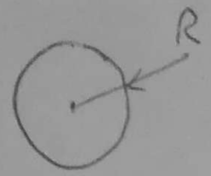
Magányos gömb

EMT2/1

2016.09.30

$$\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = \int_V \rho\, dV$$

$$\varphi_P = \int_P^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



szigetelő gömb, egyenletesen töltött

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

$r > R$ esetén, gömbfelületet az A, a belül lévő a V térfogat

$$4\pi \cdot r^2 \cdot D_r = Q$$

$A \rightarrow$ Gauss-i felület ($\vec{D} \parallel \vec{n}$ és $|\vec{D}| =$ áll.)

$$E_r = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi}\frac{1}{r^2} \leftarrow D_r = \frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$\rightarrow \varphi$ csak r-től függ ?

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E_r\, dr$$

; gömbi szimmetria

útvonal a radiális mentén

$\rightarrow r_0 \rightarrow \infty$ választás általános

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_r^{r_0} r^{-2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{r} - \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$U = \varphi(r=R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R}$$

C meghatározás $\quad C = \frac{Q}{U}$

Q összes töltés, U feszültség az elektródák között

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot R$$

maximális térerősség:

E_{max} a gömb felületén: $E_{max} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2} = \frac{U\cdot R}{R^2} = \frac{U}{R}$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = U\cdot R$$

Scanned by CamScanner

EMT2/4
2016.09.20

$$\varepsilon_0 R^2 + \varepsilon_0 \cdot 2dR + \varepsilon_0 \cdot d^2 - \varepsilon_1 R^2 > 0$$

$$d^2 + d \cdot \frac{2R\varepsilon_0}{\varepsilon_1} + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_0} R^2 > 0 \qquad d^2 + d \cdot \frac{2R}{\varepsilon_r} + (1-\varepsilon_r)R^2 > 0$$

$$\cancel{d_{12} = \frac{-\frac{2R}{\varepsilon_r} \pm \sqrt{\left(\frac{2R}{\varepsilon_r}\right)^2 - 4 \cdot (\varepsilon_0(1-\varepsilon_r)R^2}}{2}}$$

$$\cancel{\left(\frac{2R}{\varepsilon_r}\right)^2 - 4R^2 \cdot \varepsilon_0(1-\varepsilon_r) \geq 0}$$

$$\cancel{4R^2 - 4R^2 \cdot \varepsilon_0 (1-\varepsilon_r)\varepsilon_r^2 \geq 0}$$

$$\cancel{1 - (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\varepsilon_r^2 \geq 0}$$

$$\cancel{\frac{1}{\varepsilon_r^2} \geq \varepsilon_0 - \varepsilon_1 \longrightarrow \varepsilon_1 <}$$

$$d_{12} = \frac{-\frac{2R}{\varepsilon_r} \pm \sqrt{\left(\frac{2R}{\varepsilon_r}\right)^2 - 4 \cdot (1-\varepsilon_r)R^2}}{2}$$

akkor lehetséges egyáltalán, ha

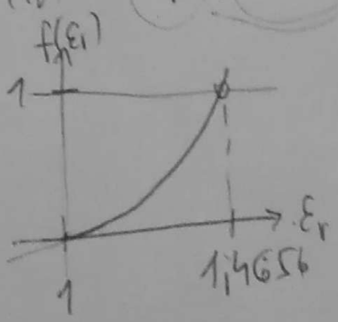
$$\left(\frac{2R}{\varepsilon_r}\right)^2 - 4R^2(1-\varepsilon_r) \geq 0$$

$$4R^2 - 4R^2\varepsilon_r^2 + 4R^2\varepsilon_r^3 \geq 0$$

$$1 - \varepsilon_r^2 + \varepsilon_r^3 \geq 0$$

$$f(\varepsilon_r) \rightarrow \varepsilon_r^2(\varepsilon_r - 1) \leq 1 \qquad \varepsilon_r > 1$$

$$\boxed{1 < \varepsilon_r < 1{,}4656}$$



Csak ilyen esetben lehet, hogy a gömb felületén kívül a maximális térerősség!

potenciál:

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} \vec{E}\,dr = \underbrace{\int_r^{R+d} E\,dr}_{\text{I.}} + \underbrace{\int_{R+d}^{\infty} E\,dr}_{\text{II.}}$$

$$\text{II.} \quad \int_R^{\infty} E\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R+d}$$

$$\text{I.} \quad \int_r^{R+d} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R+d}\right)$$

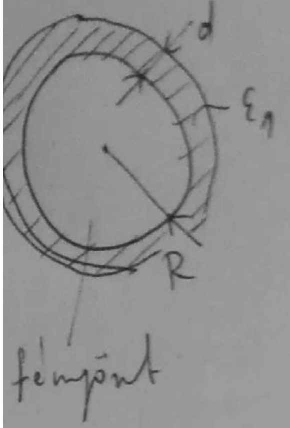
$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} & ; \ r > R+d \\ \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R+d} + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R+d}\right)\right) & , \ R > r > R+d \\ \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{R+d} + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right)\right) & , \ 0 < r < R \end{cases}$$

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R+d}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R+d}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right)} = 4\pi \ldots$$

[...]igetelővel bevont fémgömb

EMT2/1
2016.07.30.



– ε_1 permittivitású szigetelő réteg borítja a fém gömböt

– vizsgált tartományt több részre kell bontani
$$\left(\begin{array}{l} 1.\ 0<r<R \\ 2.\ R<r<R+d \\ 3.\ R+d<r \end{array}\right)$$

1.) -ben $E=0$ (fém gömbön belül nincsen tér, 0 töltés)

2.) -ben (szigetelő bevonat) $(\varepsilon=\varepsilon_r\cdot\varepsilon_0=\varepsilon_1)$

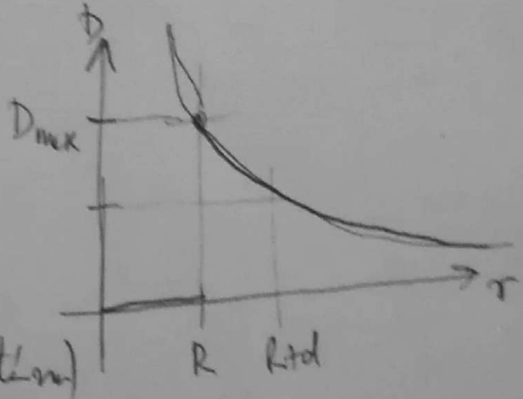
$$4\pi\cdot r^2\cdot D_r = Q \longrightarrow D_r = \frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$E_r = \frac{D_r}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{r^2}$$

3.) -ban (levegő) $(\varepsilon=\varepsilon_0)$

$$4\pi\, r^2\cdot D_r = Q \longrightarrow D_r = \frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}$$

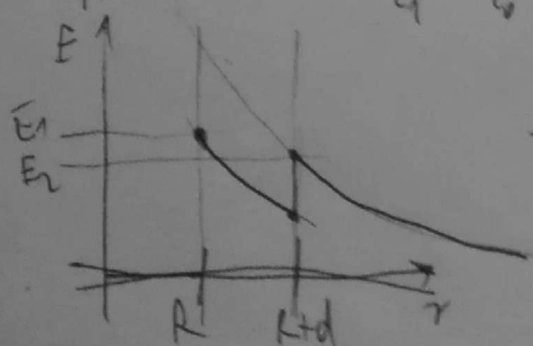


– a D folytonosan megy át a közegek határán (normális irányú a közeghatárra)

– E-nek ugrása van a közeg határán (E is normális irányú a közeg határra)

$\varepsilon_1>\varepsilon_0$ esetén $\frac{1}{\varepsilon_1}<\frac{1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r\to R+d-0) < E(r\to R+d+0)$

baloldalról (ε_1-es közegből) — jobb oldalról (levegőből)



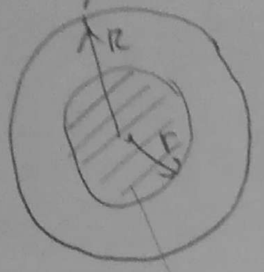
– $$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{R^2} > \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(R+d)^2}$$

$$\varepsilon_0\cdot(R+d)^2 > \varepsilon_1 R^2$$

van a gömbön belül?

EMTR/2

2016.09.30



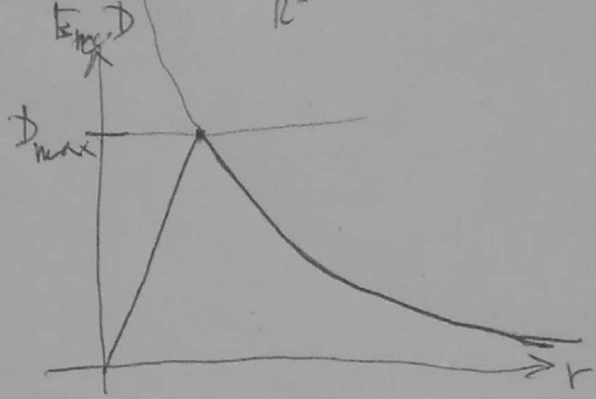
$$\rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

▨: a töltés

Gauss-törvény alapján: $4\pi r^2 \cdot D_r = Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$

$$D_r = \frac{Q}{4\pi R^3} \cdot r$$

$$D \to E_r = \frac{Q}{4\pi \varepsilon R^3} \cdot r$$



Hogyan változik minden, ha fém gömb szerepel, amelyen

– csak a fém felületén van töltés → energia minimum állapot eredménye

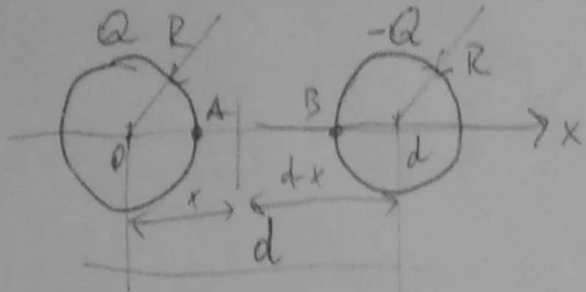
– a fémen belül nincsen térerősség (ha lenne akkor végtelen nagy áram folyna) ← potenciál állandó az egész fém elektródában!

az előző feladathoz képest

– a gömbön kívül nincsen eltérés ✓ (mert ott csak a benne lévő össztöltés szerepel illetve az elrendezés szimmetriája miatt)

Két gömb esete (azonos sugarú (R), d távolságra lévő középpontokkal)

EMT 2/5
2016.09.30



– térerősség az összekötő egyenes mentén $\vec{E}_1$ $\vec{E}_2$

$$E = E_1 + E_2$$

$$\varphi(x) = \varphi_{+Q}(r) + \varphi_{-Q}(r)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d-x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x}\right)$$

$$U = \varphi(R) - \varphi(d-R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d-R}\right) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d-R} - \frac{1}{R}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{R} - \frac{2}{d-R}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d-R}\right)}_{\frac{d}{R(d-R)}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d}{R(d-R)}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d-R}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R} - \frac{1}{d-R}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{d}{R(d-R)}}$$

pl. $d = 5R$

$$\frac{1}{d-R} = \frac{1}{4R}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{5}{4R}} = 4\pi\varepsilon_0 R\cdot\frac{2}{5}$$

0,4

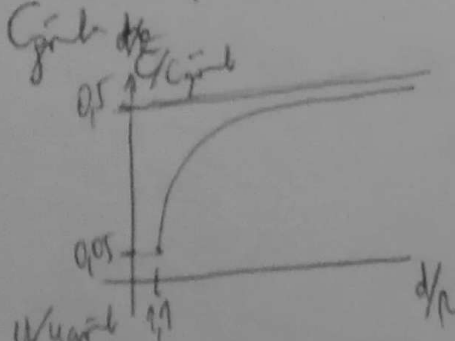
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{d/R}R\left(\frac{d}{R}-1\right) = \underbrace{4\pi\varepsilon_0 R}_{C_{gömb}}\cdot\frac{\frac{d}{R}-1}{2\frac{d}{R}}$$

$d = 10R$ $\quad \frac{d}{R} = 10$

$$\frac{1}{d-R} = \frac{1}{9R}$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R\cdot\frac{9}{2\cdot 10}$$

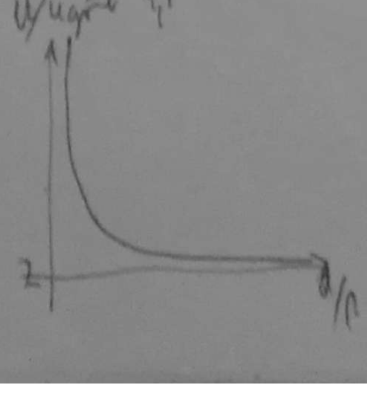
0,45



$$U_{gömb} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{d/R}{R\cdot\left(\frac{d}{R}-1\right)} =$$

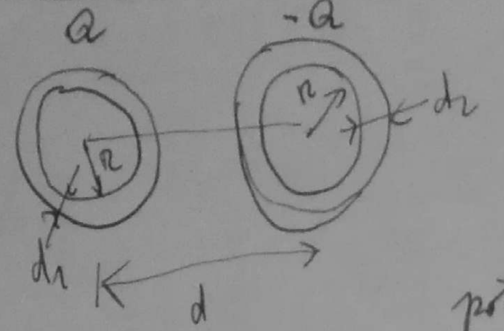
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\cdot\frac{2\cdot d/R}{\frac{d}{R}-1}$$



$$\lim_{\frac{d}{R}\to\infty}\frac{C}{C_{gömb}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{2x} = \frac{1}{2}$$

EMT 2/6
2016.10.05

Szigetelővel bevont gömbök



1. gömb R sugarú, d_1 vastag ε_1

2. gömb R sugarú, d_2 vastag ε_1

d távolságban helyezkednek el a levegőben

potenciál az összekötő egyenes mentén ($x=0$ ill $x=d$)

$$\varphi(x) = \varphi_Q + \varphi_{-Q}, \quad \text{ahol } \varphi_Q = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}; & r > d_1+R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R+d_1}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R+d_1}; & R < r < R+d_1 \end{cases}$$

$$\text{hasonlóan } \varphi_{-Q} = \begin{cases} \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}, & r > R+d_2 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R+d_2}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R+d_2}, & R<r<R+d_2 \end{cases}$$

(ennél egyszerűbb (talán) a térerősséget integrálni) | hopp

$$U = \varphi(x=R) - \varphi(x = d-R) =$$

$$= \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R+d_1} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+d_1}\right) + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d-R}\right) - \left(\underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d-R}}_{\varphi_Q(r=d-R)} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{d-R}-\frac{1}{R+d_2}\right) + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R+d_2}\right)\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{1}{R+d_1} - \frac{1}{d-R} - \frac{1}{d-R} + \frac{1}{R+d_2}\right)}_{-\frac{2}{d-R}+\frac{1}{R+d_1}+\frac{1}{R+d_2}} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+d_1}+\frac{1}{R}-\frac{1}{R+d_2}\right)$$

$$\frac{2}{R} - \frac{1}{R+d_1} - \frac{1}{R+d_2}$$

ha $d_1 = d_2 = d_0$

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{R+d_0} - \frac{2}{R+d}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{2}{R} - \frac{2}{R+d_0}\right)$$

ha a ~~...~~ $d_0 \to 0$ határátmenetet keressük, akkor a "sima" kétgömb esetet kell visszakapjuk!

$$\lim_{d_0 \to 0} \frac{2}{R+d_0} = \frac{2}{R}$$ miatt

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{R} - \frac{2}{R+d}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\cdot\left(\frac{2}{R} - \frac{2}{R}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{R} - \frac{2}{R+d}\right)$$

ami valóban megegyezik :)

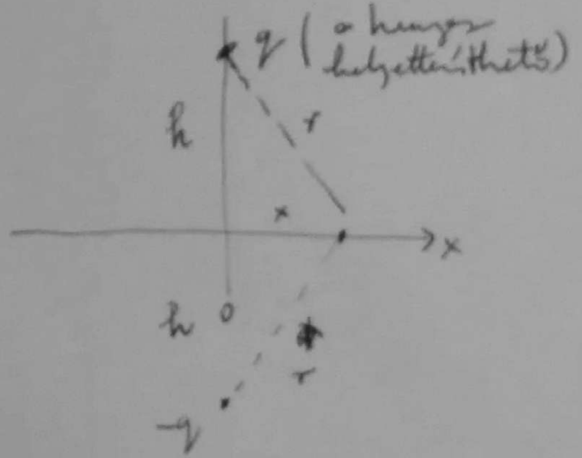
EMT2/10
2016.10.05

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{U}{\ln\frac{2h-R}{R}} \Rightarrow E_{max} = \frac{U}{\ln\frac{2h-R}{R}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2h-R}\right)}_{\frac{2h/R}{2h-R}}$$

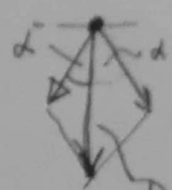
$$E_{max} = U\cdot\frac{\frac{2h/R}{2h-R}}{\ln\frac{2h-R}{R}}$$

ami a 2x-e az 2h-ra levő párhuzamos vezetőtől esetén

Fém sík felületén a kialakuló töltéseloszlás számítása



$r = \sqrt{h^2+x^2}$



$D_e = 2\cdot D_y$

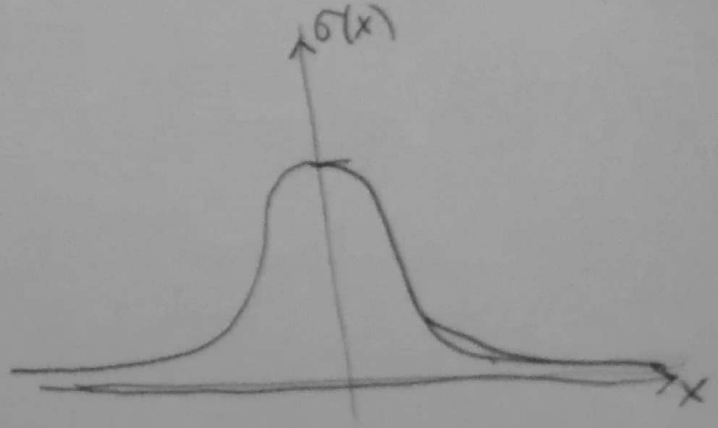
$$D_y = D\cdot\cos\alpha =$$

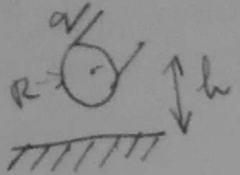
$$= \left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)\right)\cdot\cos\alpha$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{h}{r} =$$

$$\sigma(x) = D(x) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{h}{h^2+x^2}$$

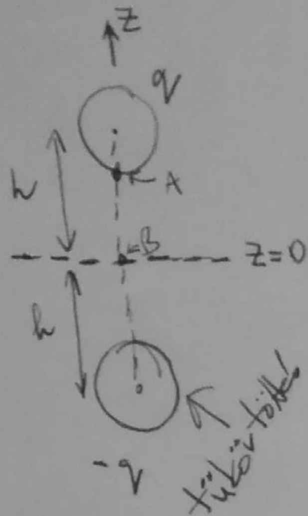
$$\frac{2U}{\ln\frac{2h-R}{R}}$$





Tükrözéssel megoldható a feladat

- $z>0$-ra azonos a megoldás (nem különböztethető meg)
- $z<0$-ra a megoldás nem ad valós megoldást
- $\varphi(z) = \varphi_{valódi} + \varphi_{tükör}$, ahol



$$\varphi_{valódi} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot \ln\frac{1}{h-z}$$ "valódi" töltés által létre hozott pot.

$$\varphi_{tükör} = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot \ln\frac{1}{h+z}$$ tükör töltés által létre hozott pot.

$$\varphi(z) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{1}{h-z} - \ln\frac{1}{h+z}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{h+z}{h-z}$$

$$\varphi(z=0) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{h}{h} = 0$$ teljesül – fizikai kép

megj. $z=0$ mentén a potenciálnak zérus értékűnek kell lennie

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h+(h-R)}{h-(h-R)} - 0 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{2h-R}{R}$$

$$C' = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{2h-R}{R}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2h-R}{R}}$$

(amit összehasonlítva a $d=2h$ távolságra lévő hengerpár esetével $C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2h-R}{R}}$, adódik, hogy a fémlapos esetben a kapacitás 2-szeres értékű)

maximális térerősség az A pontban várható:

$$E_{max} = E(z=h-R), \text{ ahol } E(z) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{h-z}+\frac{1}{h+z}\right)$$

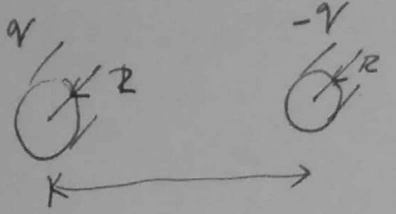
mivel

$$E_{max} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{h-(h-R)} + \frac{1}{h+(h-R)}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2h-R}\right)$$

ami megegyezik $d=2h$-ra lévő párh. hengerpár esetével

Párhuzamos hengerek

EMT2/8
2016.X.5



$$\varphi(r)=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$E(r)=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

térerősség a középpontok egyenesén → mutat (merőlegesen a középpontra)

$$E=E_q+E_{-q}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}+\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d-x}$$

mert az irányt már figyelembe vettük

$$\varphi(x)=\varphi_q(x)+\varphi_{-q}(x)=$$

$$=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{x}+\frac{-q}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{1}{d-x}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-x}{x}$$

$$U=\varphi(x=R)-\varphi(x=d-R)=$$

$$=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-R}{R}-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-(d-R)}{d-R}=$$

$$=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R}{R}\right)^2=\frac{q}{\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{d-R}{R}$$

$$C'=\frac{q}{U}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d-R}{R}}$$

$$E_{max}=E(x=R)\ \text{vagy}\ E(x=d-R)$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{max}=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{d-R}\right) \\[2ex] \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}=\dfrac{U}{2}\cdot\dfrac{1}{\ln\frac{d-R}{R}} \end{array}\right\} E_{max}=\frac{U}{2}\cdot\frac{\frac{d}{R(d-R)}}{\ln\frac{d-R}{R}}$$

$$E_{max}\sim U$$

pl. $R=2\ \mathrm{mm}$

$d=3\ \mathrm{cm}=30\ \mathrm{mm}$

$d-R=30-2=28\ \mathrm{mm}$

$$\ln\frac{d-R}{R}=\ln\frac{28}{2}=\ln 14\cong 2{,}639$$

$$C=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln 14}=\frac{\pi\varepsilon_0}{2{,}639}\simeq 1{,}054\cdot 10^{-11}\ \mathrm{F/m}$$

~~U=?~~

Tfh. $U=1\ \mathrm{kV}$

$$\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}=\frac{U/2}{\ln 14}\simeq 189{,}46$$

$$E_{max}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{d-R}\right)=$$

$$=189{,}46\ \mathrm{V}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{30-2}\right)\frac{1}{\mathrm{mm}}=$$

$$\cong 101{,}5\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{mm}}=\underbrace{101{,}5}_{1{,}015\cdot 10^2}\ \frac{\mathrm{V}}{10^{-3}\ \mathrm{m}}=1{,}015\cdot 10^5\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

vagy $E_{max}=101{,}5\ \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$