Elektrosztatika feladatok 1.

Reichardt András

EVT

2009. február 18.

Elektrosztatika

Elektrosztatika alap problémája : Adott töltéselrendezés milyen teret kelt, illetve fordítva.

Differenciális alak

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{\mathbf{E}} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathbf{D}} = \varrho$$

Integrális alak

$$\int_{\mathcal{G}} \overrightarrow{\mathbf{E}} d\vec{\ell} = 0$$

$$\int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{\mathbf{D}} d\overrightarrow{\mathbf{A}} = \int_{\mathcal{V}} \varrho dV$$

Az integrális alak alkalmazása célszerű, ha szimmetria megfontolásokkal az integrálási felület/ térfogat /út leegyszerűsödik.

Ponttöltés tere

A Q töltésű ponttöltés tere gömbszimmetrikus, ezért sugárirányú

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = k\,\frac{Q}{r^2}\,\vec{\mathbf{e}}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^3}$$

ahol $\vec{\mathbf{r}}$ a ponttöltést és a P pontot összekötő vektor, $\vec{\mathbf{e}}_r$ az ebbe az irányba mutató egységvektor.
A Coulomb-tv. illetve a Gauss-tétel alapján is adódhat a fenti megoldás.
Több ponttöltés tere az egyes ponttöltések terének szuperpozíciója.

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{\mathbf{r}}_i}{|\vec{\mathbf{r}}_i|^3}$$

ahol $\vec{\mathbf{r}}_i$ az i.-dik ponttöltést és P-t összekötő vektor.

Potenciál

Munkavégzés, amíg a ponttól a referencia pontig a próbatöltést elvisszük.

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\vec{\mathbf{r}}}^{\vec{\mathbf{r}}_0} \overrightarrow{\mathbf{E}}\, d\vec{\ell}$$

A referenciapont helye nem lényeges, mert csak két tetszőlege pont ponteciál különbsége érdekes.

$$U_{AB} = \int_{\vec{\mathbf{r}}_A}^{\vec{\mathbf{r}}_B} \overrightarrow{\mathbf{E}}\, d\vec{\ell} = \int_{\vec{\mathbf{r}}_A}^{\vec{\mathbf{r}}_0} \overrightarrow{\mathbf{E}}\, d\vec{\ell} + \int_{\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}_B} \overrightarrow{\mathbf{E}}\, d\vec{\ell} = \varphi(\vec{\mathbf{r}}_A) - \varphi(\vec{\mathbf{r}}_B)$$

Ponttöltés

Tekintsük az r sugarú gömböt (Gauss-felület)

$$\int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{\mathbf{D}} d\overrightarrow{\mathbf{A}} = \int_{\mathcal{A}} D\ dA = D \int dA = D \cdot 4\pi r^2$$

A térfogatban lévő össztöltés

$$\int_{\mathcal{V}} \varrho dV = Q$$

Ezért

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q \qquad \rightarrow \qquad D = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2}$$

$$\text{elektromos térerősség}: \ E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\text{vektorként}: \ \overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^3}$$

Potenciál

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\vec{\mathbf{r}}}^{\vec{\mathbf{r}}_0} \overrightarrow{\mathbf{E}}\, d\vec{\ell} = \int_r^{r_0} E\, dr = \int_r^{r_0} \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2} dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{r_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Gömbszimmetrikus esetben célszerű $r_0 \to \infty$ választás

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$$

Két pont (A és B) közötti potenciálkülönbség (feszültség)

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Hosszú egyenes vezető tere

Feladat

Határozzuk meg a q vonalmenti töltéssűrűségű, egyenletesen tölött vezető terét és potenciál függvényét!

Hengerszimmetrikus probléma, ezért a próbafelület henger.
Szimmetria okokból a megoldásnak csak sugárirányú összetevője lehet.
$(\overrightarrow{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{e}}_r\ E)$
Gauss-törvény baloldala :

$$\int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{\mathbf{D}} d\overrightarrow{\mathbf{A}} = \ldots = DA = \varepsilon\ E \cdot 2\pi\ r \cdot \ell$$

... és jobboldala :

$$\int_{\mathcal{V}} \varrho dV = q \cdot \ell$$

A térerősség nagyságának kifejezése

$$\varepsilon\ E \cdot 2\pi\ r \cdot \ell = q \cdot \ell \quad \rightarrow \quad E = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ \frac{1}{r}$$

A potenciál a szimmetria miatt csak a vezetőtől mért távolságtól függhet.

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \varphi(r) = \int_r^{r_0} E\ dr = \int_r^{r_0} \frac{q}{2\pi\varepsilon} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \left[\ln r\right]_r^{r_0} = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

ahol r_0 a nullpontot jelenti, amelynek értékére általában az egységnyi hosszat (pl. 1 m vagy 1 cm) választjuk.

$$\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{1}{r}$$

Két pont közötti potenciálkülönbség

$$U_{AB} = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \left(\ln \frac{1}{r_A} - \ln \frac{1}{r_B} \right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_B}{r_A}$$

Töltött sík tere

Feladat

Határozzuk meg az egyenletesen töltött sík felület terét!

A próbafelület egy egyenes hasáb, melynek felülete A_0.

$$\int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{\mathbf{D}} d\overrightarrow{\mathbf{A}} = \ldots = DA = D \cdot 2A_0$$

$$\int_{\mathcal{V}} \varrho dV = \sigma \cdot A_0$$

$$\varepsilon \; E \; 2A_0 = \sigma A_0 \quad \rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

Potenciál

A síkra merőleges irány legyen a z koordináta iránya.

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_{\vec{\mathbf{r}}}^{\vec{\mathbf{r}}_0} \overrightarrow{\mathbf{E}} d\vec{\mathbf{r}} = \int_{z}^{z_0} E \ dz = \int_{z}^{z_0} \frac{\sigma}{2\varepsilon} dz =$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon} [1]_z^{z_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}(z - z_0)$$

A síkot 0 potenciálúnak tekintve ($z_0 = 0$)

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon} z$$

Egyenes vezető tere

Feladat

Határozzuk meg a végtelen hosszú egyenes, egyenletesen töltött rúd terét a Coulomb-törvény segítségével!

Megoldás : A Coulomb-törvény elektromos térerősségre :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{\mathbf{e}}_r$$

$\vec{\mathbf{e}}_r$ a vizsgált pontba a töltésből irányuló egységvektor $(\vec{\mathbf{r}}/|\vec{\mathbf{r}}|)$
Szimmetria okokból : $\overrightarrow{\mathbf{E}}_x^{(-x)} = \overrightarrow{\mathbf{E}}_x^{(x)}$, és $\overrightarrow{\mathbf{E}}_y^{(-x)} = \overrightarrow{\mathbf{E}}_y^{(x)}$
Ezért elemi meggondolásokból $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ függőlegesen felfelé mutat, egyetlen töltésdarab ($q \cdot dx$ töltéssel) által adódó elektromos térerősség :

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \cdot dx}{r^2 + x^2} \cdot \sin(\alpha)$$

Integrálva a teljes tartományra ($x = -\infty$ és $x = \infty$ között)

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} E_y dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{q\ dx}{r^2+x^2} \, \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$E_y = 2\ \frac{q\cdot r}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{q\cdot r}{2\pi\varepsilon_0} \left[\frac{x}{r^2\sqrt{x^2+r^2}} \right]_0^{\infty} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\ r}$$

Ami megegyezik a Gauss-törvény segítségével kapottal.

AHF 2.1 : Milyen ℓ hossznál mondhatjuk, hogy az egyenes darab már végtelen? (Mikortól végtelen a véges?)

Körgyűrű tere

Feladat

Határozzuk meg az r sugarú, nagyon kis (d) átmérőjű, egyenletesen töltött körgyűrű által keltett elektromos teret a gyűrű középpontján áthaladó, a gyűrű síkjára merőleges egyenes mentén!

Megoldás Szimmetria okokból

1. a gyűrű alatt és felett a tér azonos, csak ellenkező előjelű
2. a térnek csak y-komponense lesz

Az elemi tér összetevő (dE_y)

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot r \cdot d\varphi}{r^2+h^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot r \cdot d\varphi}{r^2+h^2}\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

2. feladat / 2.

Az integrálást elvégezve $\varphi = 0$ és $\varphi = 2\pi$ között

$$E_y(h) = \frac{q\ h\ r}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(r^2+h^2)^{3/2}} = \frac{q\ h\ r}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi}{(r^2+h^2)^{3/2}}$$

$$E_y(h) = \frac{q \cdot h \cdot r}{2\varepsilon_0} \frac{1}{(r^2+h^2)^{3/2}}$$

AHF : Hogyan változik a megoldás, ha a gyűrűnek véges, d, átmérője van?

Töltött sík

Feladat

Számítsuk ki az egyenletesen (σ) töltött síktól r távolságra az elektromos térerősséget!

Megoldás A síkot koncentrikus körgyűrűkre osztjuk, és minden egyes gyűrű adalékát kiszámítjuk, majd összegezzük. Ezért szükséges egyetlen, dr vastagśagú (infinitezimálisan kicsiny) gyűrű által keltett térre.

$$dE_y = \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r \cdot d\varphi \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0} \frac{h}{(r^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\sigma r \cdot dr}{2\varepsilon_0} \frac{h}{(r^2+h^2)^{3/2}}$$

Az összes gyűrűre összegezve

$$E_y = \int_0^{\infty} dE_y = \frac{\sigma \cdot h}{2\varepsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{r \cdot dr}{(r^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\sigma \cdot h}{2\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+h^2}} \right]_0^{\infty} =$$

$$E_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$