Elektromágneses terek
3. gyakorlat

Reichardt András

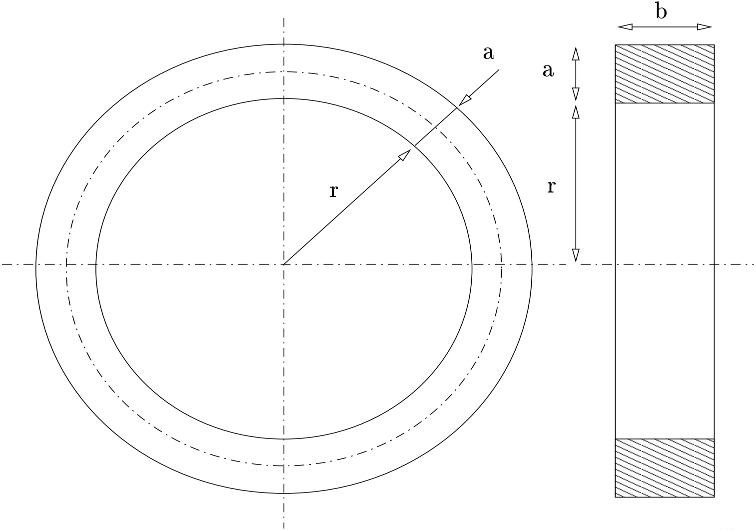
Elméleti Villamosságtan Tanszék (Csoport)
SzHV, BME

2009. március 17.

Tartalomjegyzék

1. feladat

Határozzuk meg a négyszögletes keresztmetszetű, gyűrűalakra meghajlított vezeték ellenállását!



1. feladat – Megoldás

Megoldás 1. – Első megoldás

Mintha a vezeték egyenes lenne és hossza $L = 2(r_1 + a/2)\pi$.

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{A} = \frac{1}{\sigma}\frac{2(r_1 + a/2)\pi}{b \cdot a}$$

ahol σ a vezetőképesség.

1. feladat - Megoldás – folyt.

Megoldás 2. – Más közelítés

Gyűrűt valahol megszakítva, U feszültséget kapcsolva a két végére, tetszőleges r esetén

$$U = \int_{(r)} E \, ds = 2\pi r \; E \quad \rightarrow \quad J = \sigma \; E = \frac{\sigma U}{2r\pi}$$

A keresztmetszeten átfolyó teljes áram :

$$I = b \int_{r_1}^{r_1+a} J \, dr = \frac{\sigma b}{2\pi} \; \ln \frac{r_1 + a}{r_1} = \frac{\sigma b}{2\pi} \; \ln \frac{r_0 + a/2}{r_0 - a/2}$$

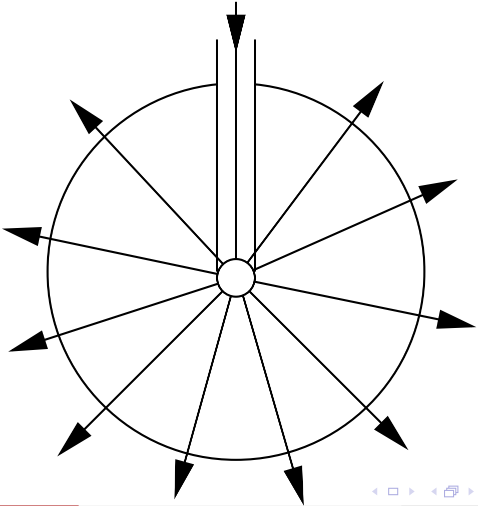
ahol $r_0 = r_1 + \frac{a}{2}$ a gyűrű közepes sugara.

$$\text{ellenállás} : \; R = \frac{U}{I} = \frac{2\pi}{\sigma b \ln \dfrac{r_0 + a/2}{r_0 - a/2}}$$

2. feladat – Pontforrás tere

Egyetlen pontforrás

Vizsgáljuk meg egyetlen pontforrás terét, ha a befolyó áram erőssége I!



2. feladat – Pontforrás tere

Megoldás

r sugarú gömbön kifolyó áram :

$$I = 4\pi r^2 \cdot J \quad \rightarrow \quad J = \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{r^2}$$

Végtelen távoli pontra vonatkoztatott potenciál :

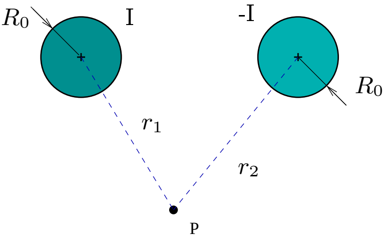
$$U = \frac{I}{4\pi\sigma}\ \frac{1}{r}$$

2. feladat – Pontforrás tere – folyt.

Két gömb alakú forrás

Határozzuk meg két olyan gömb alakú forrás terét, amelyek egyikéből kilép, másikába pedig belép ugyanazon erősségű áram!

Megoldás



A baloldali gömb felületén kilép I áram, jobboldali gömb felületén befolyik I áram. A gömbök középpontjának távolsága d.

Legyen a P pont távolsága az egyes gömböktől r_1 illetve r_2. Ekkor szuperpozícióval a térerősség és potenciál is felírható.

Potenciál a P pontban: $\varphi = \frac{I}{4\sigma\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

Gömbök közötti feszültség : $U = \varphi(r_1 = R_0, r_2 = d - R_0) - \varphi(r_1 = d - R_0, r_2 = R_0)$

$$U = 2 \cdot \frac{I}{4\sigma\pi}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{d - R_0}\right) = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{d - R_0}\right)$$

2. feladat – Pontforrás tere – folyt.

Két pontforrás 2.

Vizsgáljuk meg két pontforrás terét, amelyek mindegyikéből ugyanolyan erősségű áram lép ki!

Megoldás

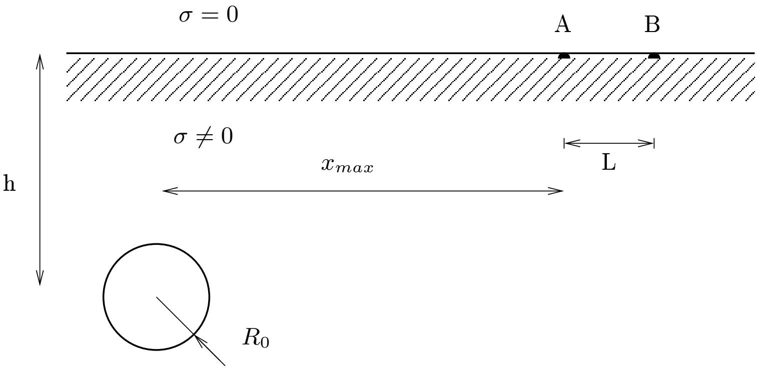
$$\varphi = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Ekvipotenciális felületek egyenlete :

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{k}{d} \quad \rightarrow \quad r_1 = \frac{r_2}{(k\ r_2/d) - 1}$$

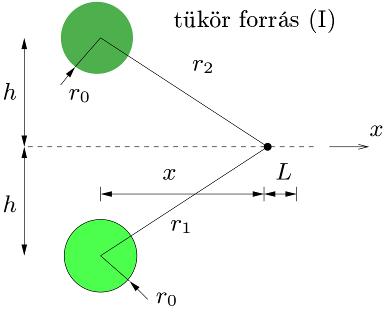
3. feladat – Lépésfeszültség

Határozzuk meg a h mélységbe sülyesztett r_0 sugarú gömb lépésfeszültségét! (L=80 cm távolságban fekvő két pont közötti feszültség)



3. feladat – Megoldás

Megoldás



Tetszőleges P pontban :

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\sigma}\,\frac{1}{r_1} + \frac{I}{4\pi\sigma}\,\frac{1}{r_2} = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

x a besüllyesztés helyétől a föld felszínén mért távolság

$$\text{potenciál : } \varphi(x) = 2\frac{I}{4\pi\sigma}\,\frac{1}{r} = \frac{I}{2\pi\sigma}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

$$\text{lépésfeszültség : } U_{lepes}(x) = \varphi(x) - \varphi(x+L) =$$

$$= \frac{I}{2\pi\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+L)^2+h^2}}\right]$$

3. feladat – Lépésfeszültség – folyt.

Célszerű – a hatodfokú egyenlet helyett – az alábbi közelítést alkalmazni :

$$U_{\text{lépés}} \approx -\frac{dU}{dx}L = \frac{I\ L}{2\pi\sigma}\frac{x}{(x^2+h^2)^{3/2}}$$

ennek szélsőértéke ($x = h/\sqrt{2}$ helyen)

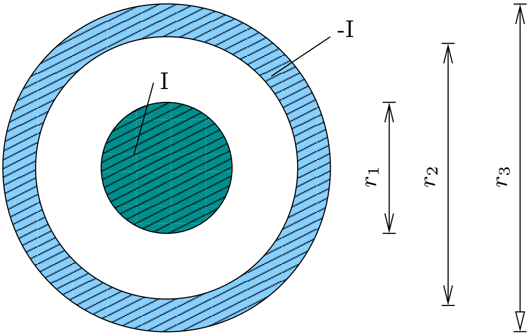
$$U_{\text{lépés,max}} = \frac{I\ L}{\sqrt{3^3}\pi\sigma h^2} = 0.061\frac{I\ L}{\sigma h^2}$$

pl. $r_0 = 0.5$ cm, $\sigma = 10^{-2}$ S/m, $I = 100$ A, $h = 2$ m, akkor $x = 1.41$ m esetén $U_{\text{lépés}} = 122$ V.
A pontos érték : $U_{\text{lépés,pontos}} = U_{\text{lépés}}(x = h/\sqrt{2}) = 115$ V.

4. feladat – Koaxiális kábel

Probléma

Határozzuk meg egy koaxiális kábel L hosszuságú szakaszának szivárgási ellenállását!



4. feladat – Koaxiális kábel – Megoldás

Megoldás

Ha a szivárgási áram I, akkor a radiális áramsűrűség a tengelytől r távolságban

$$\oint J\,dr = 0 \rightarrow J(r) = \frac{I}{2\pi r\ell} = \sigma E$$

Innen a feszültség a két vezető között

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = \frac{I}{2\pi\sigma\ell}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi\sigma\ell}\ln\frac{r_2}{r_1} = R\cdot I$$

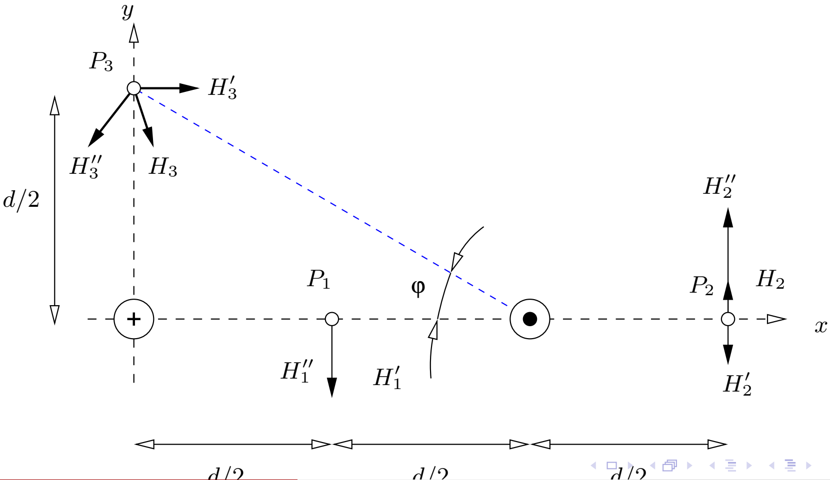
A szivárgási ellenállás illetve vezetés a definíció alkalmazásával

$$R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\sigma\ell} \qquad G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\sigma\ell}{\ln(r_2/r_1)}$$

1. feladat

Probléma

Határozzuk meg a mágneses térerősséget az ábrán bejelölt pontokban, ha $d = 20$ cm, $I' = I'' = 20$ A. Mindkét vezeték végtelen hosszúnak tekinthető!



1. feladat – Megoldás

Megoldás

Mágneses térerősség végtelen hosszú vezetőtől r távolságban :

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

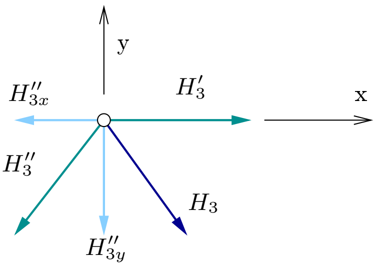
A P_1 pontban H_1' és H_1'' azonos irányú és nagyságú

$$\vec{\mathbf{H}}_1 = \vec{\mathbf{H}}_1' + \vec{\mathbf{H}}_1''; \qquad H_1 = 2\frac{I}{2\pi d/2} = \frac{2I}{\pi d} = 63.6\frac{A}{m}$$

P_2 pontban a térerősségek ellenkező irányúak :

$$H_2 = \frac{I}{2\pi d/2} - \frac{I}{2\pi 3d/2} = \frac{2I}{3\pi d} = 21.2\frac{A}{m}$$

1. feladat – Megoldás – folyt.



A P_3 pontban H_3'-nek csak x-irányú összetevője

$$H_3' = H_{3x}' = \frac{I}{2\pi d/2} = 31.8\frac{A}{m}$$

$$r_3'' = \sqrt{d^2 + (d/2)^2} = d\sqrt{5/2} = 0.224m$$

$$H_3'' = \frac{I}{2\pi r_3''} = 14.2\frac{A}{m}$$

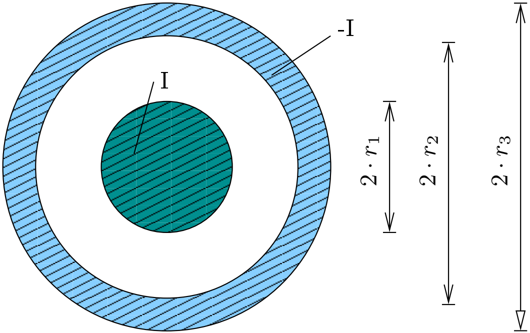
$$H_{3x}'' = -H_3'' \sin\varphi = -6.3\frac{A}{m}; \quad H_{3y}'' = -H_3'' \cos\varphi = -12.7\frac{A}{m}$$

$$H_{3x} = H_{3x}' + H_{3x}'' = 25.5\frac{A}{m}; \quad H_{3y} = H_{3y}'' = -12.7\frac{A}{m}$$

$$H_3 = \sqrt{H_{3x}^2 + H_{3y}^2} = 28.5\frac{A}{m}$$

2. feladat

Egy r_1 sugarú, végtelen hosszúnak tekinthető körkeresztmetszetű hengeres vezetőben folyó I erősségű áramot egy vele koaxiális r_3 külső illetve r_2 belső sugarú körgyűrű keresztmetszetű henger (cső) vezeti vissza.



Határozzuk meg a mágneses térerősség változását a sugár függvényében!

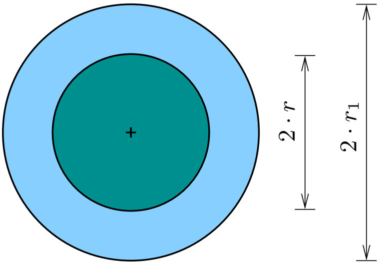
2. feladat – Megoldás

Megoldás

hengeres szimmetria ⇒ gerjesztési törvény alkalmazható
próbagörbe az r sugarú kör, amelynek mentén a mágneses térerősség állandó és érintőirányú

$$H \cdot 2r\pi = I' \qquad \text{ahol } I' \text{az r sugarú körön belül folyó áram}$$

1. térrész – belső vezetőn belül



$$r < r_1 : \qquad I' = I\frac{r^2\pi}{r_1^2\pi} = I\frac{r^2}{r_1^2}$$

$$H(r) = \frac{I\ r}{2r_1^2\pi} \qquad 0 \leq r \leq r_1$$

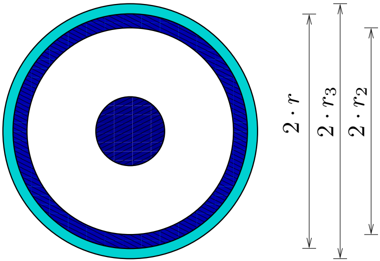
2. feladat – Megoldás – folyt.

2. térrész – két vezető között

$$I' = I$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi}\frac{1}{r}; \qquad r_1 \le r \le r_2$$

3. térrész – külső vezetőn belül



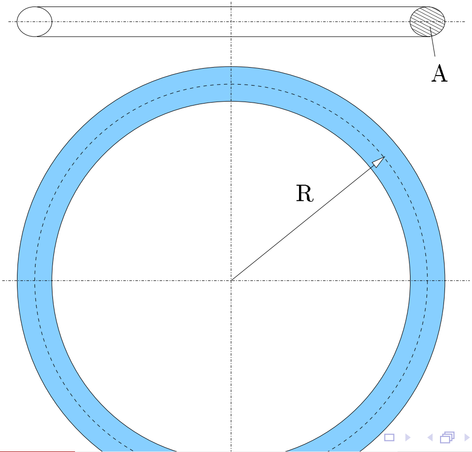
$$I' = I - \frac{(r^2 - r_2^2)\pi}{(r_3^2 - r_2^2)\pi} = I\frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi}\,\frac{1}{r_3^2 - r_2^2}\left(\frac{r_3^2}{r} - r\right); \qquad r_2 \le r \le r_3$$

3. feladat

Probléma

Egy gyűrű alakú forgástest keresztmetszetének felülete A, közepes sugara R. A gyűrű egyenletesen és sűrűn be van tekercselve N számú menettel. Határozzuk meg ezen toroid önindukció-együtthatóját!



3. feladat – Megoldás

Megoldás

a gyűrű tengelyétől r távolságban a meneteken belül

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

$$d << r \qquad \rightarrow \qquad H(r) \approx H(R)$$

ahol d a keresztmetszet tengelyre merőleges irányú mérete
szoros tekercselés esetén minden erővonal a tekercs belsejében halad

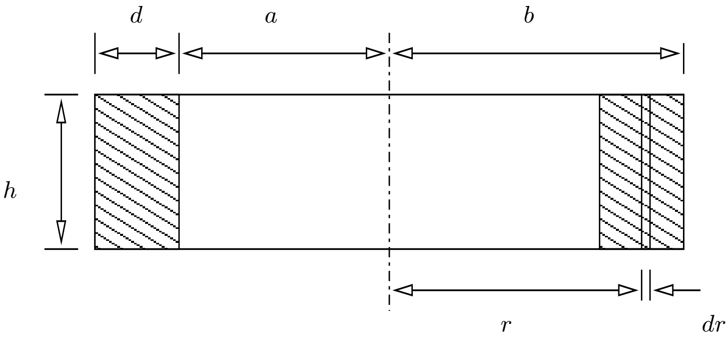
$$\Psi = N\Phi \approx NBA = N\mu HA \approx \mu \frac{N^2 IA}{2\pi R} = L \cdot I$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu N^2 A}{2\pi R}$$

4. feladat

Probléma

Gyűrűalakú tekercs keresztmetszete az ábrán látható. Határozzuk meg az önindukciós együtthatót!



4. feladat – Megoldás

Megoldás

$$\Psi = N\Phi = N\int_a^b Bh\,dr = \frac{\mu N^2 Ih}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu N^2 Ih}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$L = \frac{\mu N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$\text{ha } d = b - a \ll R = (b+a)/2$$

$$\text{akkor } \ln\frac{b}{a} \approx \frac{d}{R}$$

$$dh = A \qquad \rightarrow \qquad L \cong \frac{\mu N^2 hd}{2\pi R} = \frac{\mu N^2 A}{2\pi R}$$

5. feladat

Probléma

Határozzuk meg a koaxiális kábel ℓ hosszúságú szakaszának önindukció-együtthatóját!

Megoldás

Vezetők belsejében a fluxuskapcsolódás nem értelmezhető, ezért célszerű az energiákat meghatározni.

$$W = \frac{1}{2}\int \mu H^2 dV = \frac{1}{2}\int \mu H^2 2\pi r \; dr \; \ell = \frac{\mu\ell}{2} 2\pi \int_{r'}^{r''} H^2 r \; dr = \frac{1}{2} L I^2$$

$$L = \frac{\mu \ell 2\pi}{I^2} \int_{r'}^{r''} H^2 \; r dr$$

5. feladat – Megoldás

A térerősség kifejezés (korábbi feladat) :

$$H = \begin{cases} \dfrac{Ir}{2r_1^2\pi} \,, & 0 \le r \le r_1 \\ \dfrac{I}{2r\pi} \,, & r_1 \le r \le r_2 \\ \dfrac{I}{2\pi}\dfrac{1}{r_3^2 - r_2^2}\left(\dfrac{r_3^2}{r} - r\right) \,, & r_2 \le r \le r_3 \end{cases}$$

5. feladat – Megoldás

Az 1. térrészre részletezett számítás :

$$\frac{1}{2}L_B I^2 = \int_{(V)} \frac{1}{2}\mu H^2 dV$$

Az L hosszúságú dV darab térfogata :

$$dV = \int_0^{\ell}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_1} r\ d\phi dz dr = \ell \cdot 2\pi \cdot \int_0^{r_1} r\ dr$$

$$L_B I^2 = \frac{1}{2}\mu 2\pi\ \ell \int_0^{r_1} \frac{I^2}{(2\pi r_1^2)^2} r^2\ r\ dr$$

$$L_B = \frac{\mu I^2 \cdot 2\pi\ell}{4\pi^2 r_1^4} \underbrace{\int_0^{r_1} r^3\ dr}_{r_1^4/4} = \frac{\mu \cdot \ell}{8\pi}$$

5. feladat – Megoldás

Egyes térrészekre :

$$L_1 = \frac{\mu_1 \ell \; 2\pi}{I^2} \frac{I^2}{4 r_1^2 \pi^2} \int_0^{r_1} r^2 r \; dr = \frac{\mu_1 \ell}{8\pi}$$

$$L_2 = \frac{\mu_2 \ell \; 2\pi}{I^2} \frac{I^2}{4\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} r \; dr = \frac{\mu_2 \ell}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$L_3 = \frac{\mu_3 \ell \; 2\pi}{I^2} \frac{I^2}{4\pi^2} \frac{1}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \int_{r_2}^{r_3} \left(\frac{r_3^4}{r^2} - 2 r_3^2 + r^2 \right) r \; dr$$

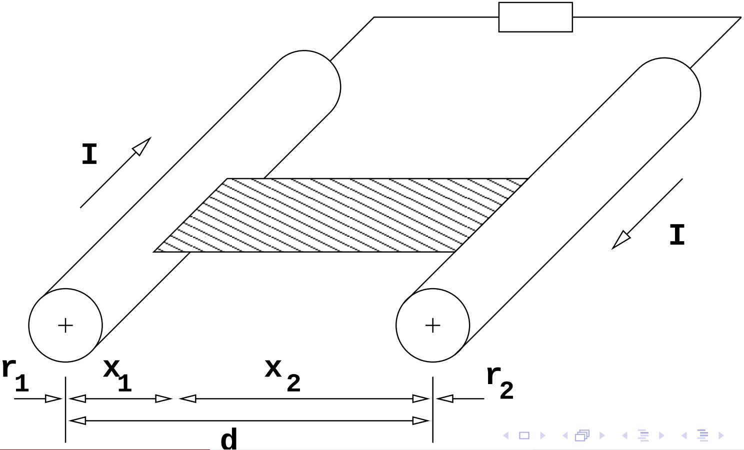
A teljes indukció-együttható a három tag összege. (Egyik közeg sem ferromágneses : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$.)

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{(1 - r_2^2/r_3^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - r_2^2/r_3^2} \right]$$

6. feladat

Probléma

Egy áramkör két párhuzamos, végtelen hosszúnak tekinthető körhengerből áll, amelyek igen nagy távolságban vannak összekötve. Határozzuk meg egy ℓ hosszuságú szakasz önindukciós állandóját!



6. feladat – Megoldás – külső önindukció

térerősség az x_1 illetve x_2 távolságú pontban, mindkét térerősség lefelé mutat

$$H_1 = \frac{I}{2\pi x_1} \qquad H_2 = \frac{I}{2\pi x_2}$$

$$\Phi = \iint B dA = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ell \left[\int_{r_1}^{d-r_2} \frac{1}{x_1} dx_1 + \int_{r_2}^{d-r_1} \frac{1}{x_2} dx_2\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi}\left[\ln\frac{d-r_2}{r_1} + \ln\frac{d-r_1}{r_2}\right] = L_k\ I$$

$$\text{külső önindukció : } \boxed{L_k = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{(d-r_1)(d-r_2)}{r_1 r_2}}$$

6. feladat – Megoldás – belső önindukció

elég messze lévő vezetékek esetén ($d \gg r_1$ és $d \gg r_2$), a másik vezetőben folyó áram tere nem befolyásolja a vezetőn belüli teret

$$\text{előző példa alapján}: \; L_{b1} = L_{b2} = \frac{\mu_0 \mu_r \ell}{8\pi}$$

Teljes önindukció -együttható értéke ($L = L_k + 2L_b$)

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[\ln \frac{(d - r_1)(d - r_2)}{r_1 r_2} + \frac{\mu_r}{2} \right]$$

egyenlő sugarú, nem ferromágneses vezetők esetén :

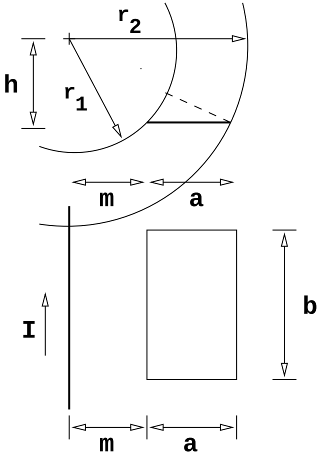
$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \left[\ln \frac{d - r}{r} + \frac{1}{4} \right] \approx \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \left[\ln \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \right]$$

Nem ferromágneses vezetők esetén $L_b \ll L_k$.

7. feladat

Probléma

Határozzuk meg az ábrán látható, végtelen hosszúnak tekinthető egyenes vezeték és négyszögletes hurok kölcsönös indukció-együtthatóját!



7. feladat – Megoldás

Az egyenes vezető által létrehozott mágneses tér erővonalai koncentrikus körök. A hurok fluxusa megegyezik a körív mentén elforgatott hurok fluxusával.

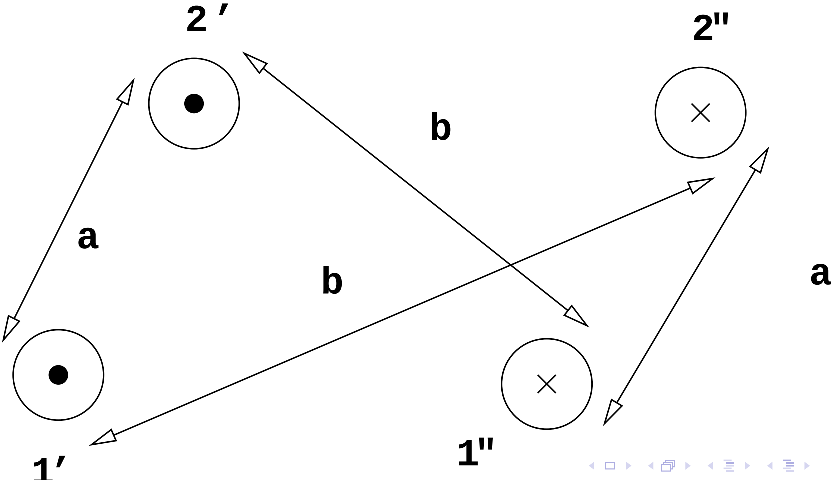
$$\Phi = \int_{(A)} B \; dA = \int_{r_1}^{r_2} \underbrace{\mu \frac{I}{2\pi r}}_{B} \underbrace{b \; dr}_{dA} = \frac{\mu I b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = L_{12} I$$

$$L_{12} = \frac{\mu b}{2\pi} \; \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad r_1 = \sqrt{m^2 + h^2}; \quad r_2 = \sqrt{(m+a)^2 + h^2}$$

8. feladat

Probléma

Határozzuk meg az ábrán látható két kettősvezeték ℓ hosszúságú kölcsönös indukció-együtthatóját!



8. feladat – Megoldás

Az előző példa eredményeit felhasználva :

$$\Phi_{21} = L'_{21} I_1 + L''_{21} I_1 = L_{21}$$

Az erővonalak irányát figyelembe véve :

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu \ell}{2\pi}\left[\ln \frac{b_1}{a_1} + \ln \frac{b_2}{a_2}\right] = \frac{\mu \ell}{2\pi} \ln \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}$$