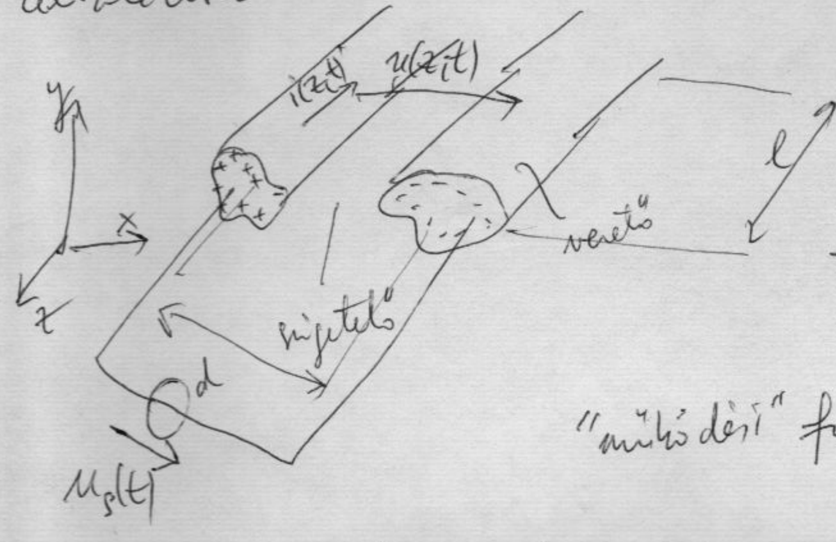
Távvezetékek – (modell, időtartomány,

általánosan



l – hossz

d – karakterisztikus távolság

feltételek:

$\lambda = \frac{c}{f} \gg d$, $l \gg d$

"működési" frekvencia

· elosztott paraméterű hálózat (nem koncentrált paraméterű)

– terjedési sebesség → λ → összemérhető a hálózat (áramkör) méretével

– hullámvezetőnek is hívhatjuk

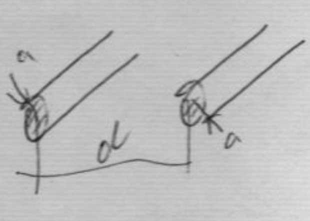
· megvalósítások:

pl. koaxiális kábel

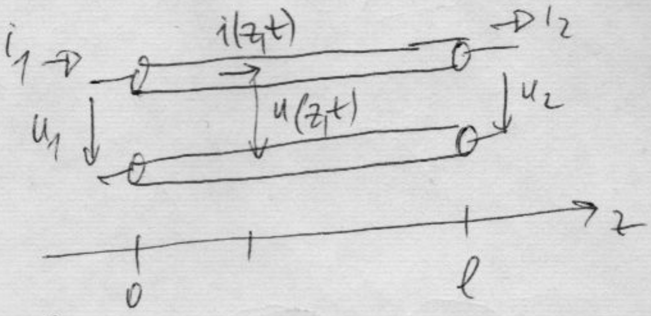
tipikus ~~méretek~~ hullámhosszak

	λ	f
	30 m	10 MHz
30 cm =	0,3 m	1 GHz
3 mm =	0,003 m	100 GHz
300 μm =	0,3 mm	1 THz

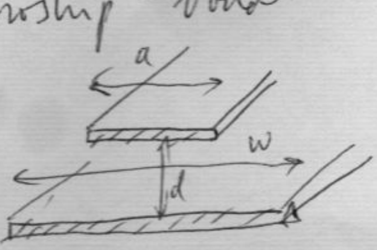
kettősvezeték (Lecher-vezeték)



Távvezeték sémája:



· microstrip – vonal



Vezetés paraméterek értelmezése

$a = 2\ mm$; $b = 4\ mm$

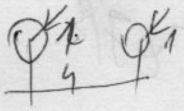
$L = 1{,}386 \cdot 10^{-7}\ H = 138{,}6\ nH$

$C = 1{,}6052 \cdot 10^{-10}\ F = 160{,}5\ pF$ $\varepsilon_r = 2$;

$R = 2 \cdot 10^{-6}\ \Omega$ $R_s = 16{,}78\ nS/m$

$G = 9{,}06 \cdot 10^{-5}\ S =$ $\varepsilon'' = \varepsilon_0$;

$= 90{,}6\ \mu S$

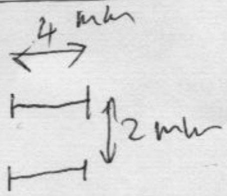


$L = 5{,}267 \cdot 10^{-7}\ H$

$C = 4{,}224 \cdot 10^{-11}\ F$

$R = 5{,}34 \cdot 10^{-6}\ \Omega$

$G = 2{,}385 \cdot 10^{-5}\ S$

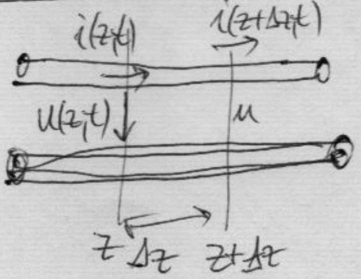


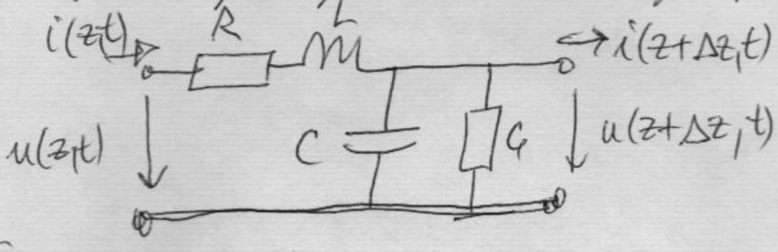
$$\left\{ \begin{array}{l} L = 6{,}283 \cdot 10^{-7}\ H \\ C = 3{,}541 \cdot 10^{-11}\ F \\ R = 8{,}39 \cdot 10^{-6}\ \Omega \\ G = 2 \cdot 10^{-5}\ S \end{array} \right.$$

$\varepsilon'' = \frac{5}{\ldots}$ $\sigma = 0{,}01\ S/m$

Időtartománybeli leírás – jellemző mennyiségek R', L', C', G'

(hosszegységre eső mennyiségek)





$$\frac{u(z+\Delta z,t)-u(z,t)}{\Delta z} = -R'\cdot i(z,t) - L'\cdot\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

Kirchhoff-fesz. tv.

$$u(z+\Delta z,t) - u(z,t) + R\,i(z,t) + L\cdot\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = 0$$

Kirchhoff-áram tv.

$$i(z+\Delta z,t) - i(z,t) + G\,u(z+\Delta z,t) + C\,\frac{\partial u(z+\Delta z,t)}{\partial t} = 0$$

$R = R'\cdot\Delta z$; $L = L'\cdot\Delta z$; $G = G'\Delta z$; $C = C'\cdot\Delta z$

$$\frac{i(z+\Delta z,t)-i(z,t)}{\Delta z} = -G'\cdot u(z+\Delta z,t) - C'\cdot\frac{\partial u(z+\Delta z,t)}{\partial t}$$

$\Delta z \to 0$ elvégzésével $\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{I.}\quad \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -R'\cdot i(z,t) - L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ &\text{II.}\quad \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -G'\cdot u(z,t) - C'\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \end{aligned}}$$

TÁVÍRÓ EGYENLETEK

átalakítás → $\frac{\partial}{\partial z}$ I. és II. alkalmazása $\frac{\partial i}{\partial t}$-re

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L'C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \underbrace{(R'C'+L'G')\frac{\partial u}{\partial t} + R'G'u}_{\text{ideális TV (veszteségmentes) esetén } \equiv 0}$$

hasonlóan i-re is kifejezhető

Megoldás frekvencia tartományban

- szinuszos időfüggés feltételezése → tetszőleges időfüggés előállítható

$$u_s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$ alapján

- komplex jelölésmód: $u(t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{U}\cdot \cancel{\cos}\, e^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\hat{\bar{U}}\cdot e^{j\omega t}\right\} =$

$$= \hat{U}\cdot\cos(\omega t+\varphi)$$

→ $u(z,t) = \hat{U}(z)\cdot\cos(\omega t+\varphi(z))$, ahol $\hat{\bar{U}}(z) = \hat{U}(z)\, e^{j\varphi(z)}$ komplex amplitúdó

$i(z,t) = \hat{I}(z)\cdot\cos(\omega t+\rho(z)) \Leftrightarrow \bar{I}(z) = \hat{I}(z)\cdot e^{j\rho(z)}$ komplex amplitúdó

$$u(z,t) \hat{=} \mathrm{Re}\left\{\bar{U}(z)\, e^{j\omega t}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{Re}\Big\{\underbrace{j\omega\cdot\bar{U}(z)}_{\text{komplex amplitúdó}}\cdot e^{j\omega t}\Big\}$$

ebből

$$\begin{aligned} \text{I} &\rightarrow \frac{d\bar{U}}{dz} = -R'\bar{I}(z) - j\omega L'\cdot\bar{I}(z) \\ \text{II} &\rightarrow \frac{d\bar{I}}{dz} = -G'\bar{U}(z) - j\omega C'\cdot\bar{U}(z) \end{aligned}\Bigg\}$$ közönséges differenciálegyenlet

$$\text{I}\cdot\frac{d}{dz}(.) : \frac{d^2\bar{U}(z)}{dz^2} = -(R'+j\omega L')(-G'-j\omega C')\,\bar{U}(z)$$

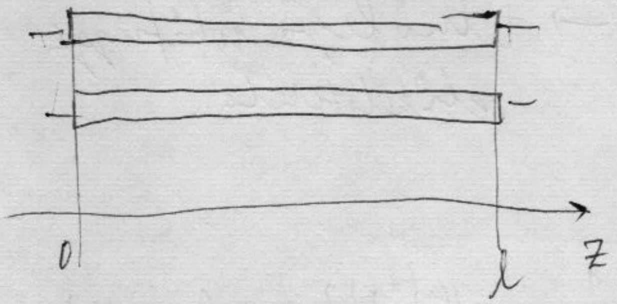
$$\boxed{\frac{d^2\bar{U}(z)}{dz^2} - \underbrace{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')}_{\gamma^2}\,\bar{U}(z) = 0}$$

Helmholtz-egyenlet

$\bar{I}(z)$-re hasonlóan lehet jutni

$\gamma^2 \rightarrow \gamma$: terjedési együttható

Szinuszos állandósult állapot megoldása



1) leírás $u(z,t) = \mathrm{Re}\{\bar{U}(z)\, e^{j\omega t}\}$

$i(z,t) = \mathrm{Re}\{\bar{I}(z)\, e^{j\omega t}\}$

leíró egyenletek:

$$-\frac{d\bar{U}}{dz} = (R'+j\omega L')\,\bar{I} \quad \text{és} \quad -\frac{d\bar{I}}{dz} = (G'+j\omega C')\,\bar{U}$$

2) Helmholtz-egyenlet

$$\frac{d^2\bar{U}}{dz^2} - \bar{\gamma}^2\bar{U} = 0 \quad \text{ahol} \quad \bar{\gamma} = \sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

terjedési együttható; csillapítási együttható (α); fázis tényező (β)

3) általános megoldás

→ próbafv: $\bar{U}(z) = \bar{U}_0\, e^{\bar{k}z}$

behelyettesítjük H.e-be $\quad \bar{k}^2 \cdot \bar{U}_0 e^{\bar{k}z} - \bar{\gamma}^2 \bar{U}_0 e^{\bar{k}z} = 0 \rightarrow \bar{\gamma}^2 = \bar{k}^2 \rightarrow \bar{k} = \pm\bar{\gamma}$

megoldás alakja: $\bar{U}(z) = \bar{U}^+ \cdot e^{-\bar{\gamma}z} + \bar{U}^- e^{\bar{\gamma}z}$

· $\bar{I}(z)$ kifejezése: $\bar{I}(z) = -\dfrac{1}{R'+j\omega L'} \cdot \dfrac{d\bar{U}}{dz} = \dfrac{\bar{\gamma}}{R'+j\omega L'}\left(\bar{U}^+ e^{-\bar{\gamma}z} - \bar{U}^- \cdot e^{\bar{\gamma}z}\right)$

definíció: $\boxed{\bar{Z}_0 = \dfrac{R'+j\omega L'}{\bar{\gamma}} = \sqrt{\dfrac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}}}$ hullámimpedancia

ennek felhasználásával: $\boxed{\bar{I}(z) = \dfrac{\bar{U}^{\oplus}}{\bar{Z}_0} e^{-\bar{\gamma}z} - \dfrac{\bar{U}^{\ominus}}{\bar{Z}_0} e^{\bar{\gamma}z}}$ és $\boxed{\bar{U}(z) = \bar{U}^{\oplus} e^{-\bar{\gamma}z} + \bar{U}^{\ominus} e^{\bar{\gamma}z}}$

a távvezetéket jellemző paraméterek $\underbrace{\bar{\gamma}, \bar{Z}_0}_{\text{hullámparaméter}}, \ l$ +

Megoldás értelmezése

- legyen $U^- = 0$ ⟶ $U(z) = U^+ e^{\gamma z} = U^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$

  most $U^+ \in \mathbb{R}$

  időfüggvény: $u(z,t) = \mathrm{Re}\{U(z)\, e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{U^+ e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\} =$

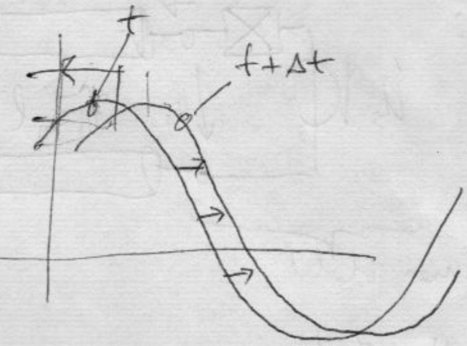
$$= U^+ e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$$

$\alpha := 0$ ⤳ $u(z,t) = U^+ \cdot \cos(\omega t - \beta z) = \underbrace{U^+ \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{\beta}{\omega} z\right)\right]}$

részletes ugyanúgy mint ld. Laar... ← +z irányba haladó hullám!

→ $\frac{\beta}{\omega} t$ a távolsággal arányos késést okoz

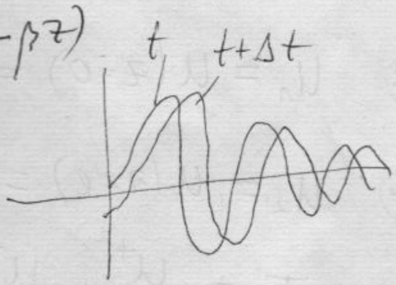
$v = \frac{\beta}{\omega}$ fázissebesség



periodicitás: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ → $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}}$

hullámhossz

ha $\alpha \neq 0$ $u(z,t) = U^+ \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{csillapítás}} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$



- $U^+ \neq 0$ $U^- \neq 0$

  $u(z,t) = U^- e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t + \beta z)$ → balra haladó, csillapított hullám

  $U(z) = U^+ e^{-\gamma z} - U^- e^{\gamma z}$ ⇒ a kétféle (irányba) haladó hullám összege

5) Ideális TV — veszteségmentes $R'=0$; $G'=0$ ←

a) $\gamma = \sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')} = j\omega\sqrt{L'C'} = j\beta \Rightarrow \beta = \omega\sqrt{L'C'}$

$\alpha = 0$ (csillapításmentes)

$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$ – ω-tól független terjedési sebesség

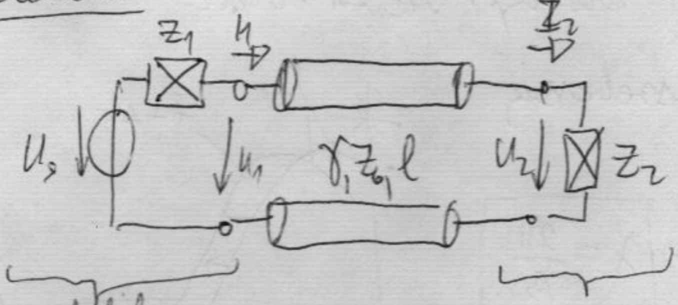
"disszipációmentes"

[homogén szigetelőre $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$, spec. levegő/vákuum $v = c$]

b) $Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \in \mathbb{R}$ tisztán valós ⇒ „hullámellenállás"

6) Peremfeltételek

tipikus eset:



primer oldal

② $U_2 = Z_2 I_2$ | összekapcsolási kényszerek

① $U_1 = U_s - Z_1 I_1$

③ $U_1 = U(z=0) = U^+ + U^-$

④ $U_2 = U(z=l) = U^+ e^{-\gamma l} + U^- e^{\gamma l}$

} TV megoldása alapján

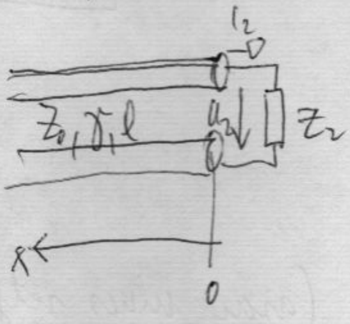
⑤ $I_1 = \frac{U^+}{Z_0} - \frac{U^-}{Z_0}$

⑥ $I_2 = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma l}$

①–⑥ ⇒ U^+ és U^- meghatározható

V. A lezáró impedancia szerepe

- a lezárás fogja meghatározni a határmódokat
ennek a helyétől számolunk



(áttérés $x = l - z$) $\Rightarrow z = l - x$

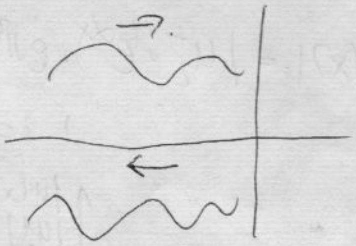
$$U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z} =$$

$$= U^+ e^{-\gamma(l-x)} + U^- e^{\gamma(l-x)} =$$

$$= \underbrace{U^+ e^{-\gamma l}}_{U_2^+} \cdot e^{\gamma x} + \underbrace{U^- e^{\gamma l}}_{U_2^-} e^{-\gamma x}$$

$$U(x) = U_2^+ e^{\gamma x} + U_2^- e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \underbrace{\frac{U_2^+}{Z_0} e^{\gamma x}}_{\text{"beeső"}} - \underbrace{\frac{U_2^-}{Z_0} e^{-\gamma x}}_{\text{"reflektált", "visszavert"}}$$



2) Reflexiótényező

$$\bar{r} = \left.\frac{\bar{U}_{visszavert}}{\bar{U}_{beeső}}\right|_{\text{"a lezáráson"}}$$

itt: $\boxed{r_2 = \frac{U_2^- e^{-\gamma \cdot 0}}{U_2^+ e^{\gamma 0}} = \frac{U_2^-}{U_2^+}} \longrightarrow U_2^- = r_2 \cdot U_2^+$

$$U(x) = U_2^+ \left(e^{\gamma x} + r_2 e^{-\gamma x}\right) \quad \text{ill.} \quad I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} \cdot \left(e^{\gamma x} - r_2 e^{-\gamma x}\right)$$

megjegyzés: $\frac{\bar{I}_{visszavert}}{\bar{I}_{beeső}} = -\bar{r}$

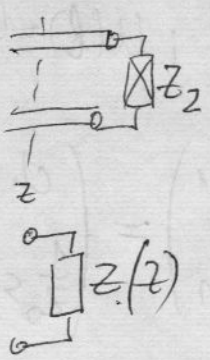
: leírt vezeték bármely pontjában kétpólus, amelybe

15 ↓ 8 után 8/b.

$$U(z) = U_1^+ e^{-\gamma z} + U_1^- e^{+\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{U_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U_1^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$$Z(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = Z_0 \cdot \frac{U_1^+ e^{-\gamma z} + U_1^- e^{\gamma z}}{U_1^+ e^{-\gamma z} - U_1^- e^{\gamma z}}$$



(vezeték végén $Z_2 = Z(l) = Z_0 \cdot \frac{U_2^+ + U_2^-}{U_2^+ - U_2^-} = Z_2 = Z_0 \frac{U_1^+ e^{-\gamma l} + U_1^- e^{\gamma l}}{U_1^+ e^{-\gamma l} - U_1^- e^{\gamma l}}$

elején: $Z(0) = Z_0 \cdot \frac{U_1^+ + U_1^+}{U_1^+ - U_1^-}$)

. visszafelé mérve $(x = h - z)$

$$U(x) = U_2^+ e^{\gamma x} + U_2^- e^{-\gamma x} \quad ; \quad I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} e^{\gamma x} - \frac{U_2^-}{Z_0} e^{-\gamma x}$$

$$Z(x) = \frac{U(x)}{I(x)} = \frac{U_2^+ e^{\gamma x} + U_2^- e^{-\gamma x}}{\frac{U_2^+}{Z_0} e^{\gamma x} - \frac{U_2^-}{Z_0} e^{-\gamma x}} = Z_0 \frac{1 + \frac{U_2^-}{U_2^+} e^{-2\gamma x}}{1 - \frac{U_2^-}{U_2^+} e^{-2\gamma x}} = Z_0 \frac{1 + r(x)}{1 - r(x)}$$

ahol $r(x) = \frac{U_2^-}{U_2^+} e^{-2\gamma x}$

felhasználjuk $e^{\gamma x} = ch(\gamma x) + sh(\gamma x)$; $e^{-\gamma x} = ch(\gamma x) - sh(\gamma x)$

$$U(x) = U_2^+ [(1 + r_2) ch\gamma x + (1 - r_2) sh\gamma x] ; \quad I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} [(1 - r_2) ch\gamma x + (1 + r_2) sh\gamma x]$$

lezárás feszültsége ($U_2 = U_2^+ (1 + r_2)$)

$$U(z) = U_2 \Big(ch\gamma x + \underbrace{\frac{1 - r_2}{1 + r_2}}_{Z_0/Z_2} \cdot sh\gamma x \Big) \text{ és } I(x) = \frac{U_2}{Z_0} \Big(\frac{1 - r_2}{1 + r_2} ch\gamma x + sh\gamma x \Big)$$

és $Z_2 = U_2 / I_2$

$$\left. \begin{aligned} U(x) &= U_2 \cdot ch(\gamma x) + Z_0 I_2 \, sh\gamma x \\ I(x) &= I_2 \cdot ch(\gamma x) + \frac{U_2}{Z_0} sh\gamma x \end{aligned} \right\}$$

→ A hosszúsági vezeték alkotta kétkapu láncban.

$(x = l,\ U(l) = U_1,\ I(l) = I_1)$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\gamma l & Z_0\,\mathrm{sh}\,\gamma l \\ \frac{1}{Z_0}\mathrm{sh}\,\gamma l & \mathrm{ch}\,\gamma l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

megj. $A_{11} = A_{22}$ alapján szimmetrikus

$\Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$ $(\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ miatt$)$

— (előző óra vége)

- bemeneti impedancia: Z_{be} a távvezeték elején

$$Z_{be} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2\,\mathrm{ch}(\gamma l) + I_2 Z_0\,\mathrm{sh}(\gamma l)}{\frac{U_2}{Z_0}\mathrm{sh}(\gamma l) + I_2 \cdot \mathrm{ch}(\gamma l)} = Z_0 \frac{Z_2\,\mathrm{ch}(\gamma l) + Z_0\,\mathrm{sh}(\gamma l)}{Z_0\,\mathrm{ch}(\gamma l) + Z_2\,\mathrm{sh}(\gamma l)}$$

ideális távvezetékre

$$\mathrm{ch}\,\gamma x \underset{\gamma = j\beta}{=} \cos\beta x \quad \text{és} \quad \mathrm{sh}\,\gamma x = j\sin\beta x$$

helyettesítésekkel adódik

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= U_2\cos\beta x + jZ_0 \cdot \sin\beta x \cdot I_2 \\ I_1 &= j\frac{U_2}{Z_0} \cdot \sin\beta x + \cos\beta x \cdot I_2 \end{aligned}\right\} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \cos\beta x & jZ_0 \cdot \sin\beta x \\ j\frac{1}{Z_0} \cdot \sin\beta x & \cos\beta x \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Z_{be} = Z_0 \cdot \frac{Z_2 \cdot \cos(\beta l) + jZ_0\sin\beta l}{jZ_2 \cdot \sin(\beta l) + Z_0 \cdot \cos\beta l}}$$