Hullámegyenlet és síkhullám megoldása

- forrásmentes, lineáris, izotróp, homogén közeg
(szinuszos állapotot feltételezve → complex notation)

① $\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H}$ $\quad$ $(\mathrm{rot}\,\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H})$

② $\nabla \times \bar{H} = j\omega\varepsilon \bar{E}$ $\quad$ $(\mathrm{rot}\,\bar{E} = j\omega\varepsilon\bar{E})$

rot ① és ② alkalmazva

$$\nabla\times\nabla\times\bar{E} = \nabla\times(-j\omega\mu\bar{H}) = -j\omega\mu\cdot\nabla\times\bar{H} = -j\omega\mu\cdot j\omega\varepsilon\bar{E}$$

$$\nabla\times\nabla\times\bar{E} = \omega^2\mu\varepsilon\bar{E}$$

felhasználva $(\nabla\times\nabla\times\bar{A} = \nabla(\nabla\bar{A}) - \nabla^2\bar{A}$ Green-tétel)

(Helmholtz-egyenlet)

$$\boxed{\nabla^2\bar{E} + \omega^2\mu\varepsilon\,\bar{E} = 0}$$ $\bar{E}$ komplex értékű vektor

(felhasználva, hogy $\nabla E = 0$ a forrásmentes tartományon)

(Hasonlóan ~~rot~~ $\nabla\times$ ② és ① alk.) → $\boxed{\nabla^2\bar{H} + \omega^2\varepsilon\mu\bar{H} = 0}$

$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ a terjedési együttható (propagation constant)

$[k] = m^{-1}$

(elegendő csak $\bar{E}$-re vagy $\bar{H}$-ra megoldani!)

- veszteséges közegben ($\sigma \neq 0$) $\qquad$ III/11-nél mondandó el!

$\nabla\times\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}$ és $\nabla\times\bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} + \sigma\bar{E}$

hasonlóan az előző ponthoz: $\nabla\times\nabla\times\bar{E} = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon\bar{E} + \sigma\bar{E})$

$$\nabla^2\bar{E} + \underbrace{(\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu\sigma)}_{\gamma^2}\bar{E} = 0 \Leftrightarrow \nabla^2\bar{E} + \omega^2\varepsilon\mu\left(1 - j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)\bar{E}$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}$ komplex terjedési együttható az III/1-nél adódik általánosan veszteséges közegre Kiegé.

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \vec{E} = 0$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}$$

---

tfh. $\vec{E} = \vec{e}_x \cdot E_x$ és x ill. y irányban nem változik

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \gamma^2 E_x = 0 \quad \rightarrow \quad E_x(z) = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z}$$

időtartományban: $e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$ alakú az $e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$

< ? értelmezés

veszteség figyelembe vehető komplex permittivitással

$\boxed{\sigma = 0}$, de $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ $\rightarrow$ $\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} = jk = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'(1 - j\,tg\delta)}$

ahol $tg\,\delta = \dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ az anyag veszteségi tényezője

veszteségmentes esetre

Megoldás veszteségmentes közegre

($\sigma = 0$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}$)

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \sqrt{j\omega\mu j\omega\varepsilon} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta \quad , \boxed{\alpha = 0}$$

fázis sebesség:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad c_0 \cong 3\cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

hullámimpedancia

szabadtéri hullámimp.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad ; \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega \cong 120\pi$$

, tfh. csak x-irányú komponense van ($\vec{E} = \vec{e}_x \cdot E_x$)

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \text{ és } \frac{\partial}{\partial y} = 0 \text{ akkor } \nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \varepsilon\mu \bar{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

ennek megoldása $E_x(z) = E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}$, E^+ és E^- tetszőleges amplitúdó [konst.] ($\mathbb{C}$)

időfv.-ek (tfh. E^+ és E^- valós)

$$E_x(z,t) = E^+ \cdot \cos(\omega t - kz) + E^- \cdot \cos(\omega t + kz)$$

(síkhullám, mert a fix fázisú pont mozgása [azonos fázis a cos-ban]

$\omega t - kz = \text{áll.}$ szerint megy $\rightarrow$ +z-ben halad mozogni ahogy az idő megy

fázis sebesség, mint a fix fázisú pont a hullámon haladási sebessége

$$v_f = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t - \text{áll.}}{k}\right) = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

hullámhossz (λ) – a két szomszédos maximum közötti távolság

$$(\omega t - kz) - [\omega t - k(z + \lambda)] = 2\pi \quad \text{amiből} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \cdot v_f}{\omega} = \frac{v_f}{f}$$]

mi van H-val?

mivel $E_x, E_y = 0$ miatt

$-j\omega\mu\bar{H} = \nabla\times\bar{E}$ alapján $\bar{H} = \frac{1}{-j\omega\mu}\cdot \mathrm{rot}\,\bar{E} = \frac{j}{\omega\mu}\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= \cancel{\bar{e}_x \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\cdot \bar{e}_y} = \frac{j}{\omega\mu}\left(\bar{e}_y \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z} - \bar{e}_z \cdot \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial y}}_{=0}\right) = \bar{e}_y \frac{j}{\omega\mu}\cdot\frac{\partial E_x}{\partial z}$

$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}\right) = -jkE^+ e^{-jkz} + jkE^- e^{jkz}$

$\bar{H} = \underbrace{\frac{j}{\omega\mu}\cdot -jk}_{\frac{k}{\omega\mu} = \frac{1}{\eta}} E^+ e^{-jkz} + \underbrace{\frac{j}{\omega\mu}\cdot jk}_{-\frac{k}{\omega\mu} = \frac{1}{\eta}} E^- e^{jkz} = \frac{1}{\eta}\left(E^+ e^{-jkz} - E^- e^{jkz}\right)$

ahol $\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ intrinsic impedancia

(Megjegyzés: $\bar{E}$ és $\bar{H}$ egymásra is merőleges és a haladási irányra is
(TEM - transzverzális EM hullám)

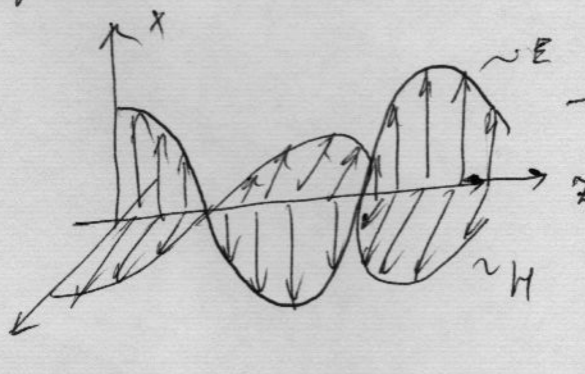
Példa: Veszteségmentes közegben haladó hullám

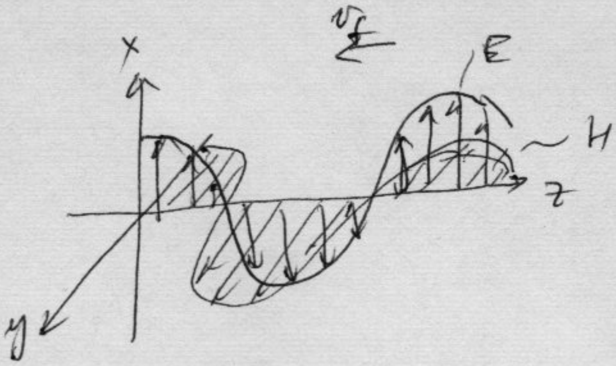
$E_x = E_0 \cdot \cos(\omega t - \beta z)$, $f = 50\ \mathrm{GHz}$, a közegbeli hullámhossz: $\lambda_g = 3\ \mathrm{cm}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}03} = 209{,}4\ \mathrm{m}^{-1}$ és $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k} = \lambda f = 0{,}03\cdot 5\cdot 10^9 = 1{,}5\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$c = v_f = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \rightarrow \varepsilon_r = \left(\frac{c_0}{v_f}\right)^2 = \left(\frac{3\cdot 10^8}{1{,}5\cdot 10^8}\right)^2 = 4$; $\eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{4}} = \boxed{188{,}5\ \Omega}$

Megoldás szemléltetése





$$E_x(z,t) = E_0 \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega} z\right)\right)$$

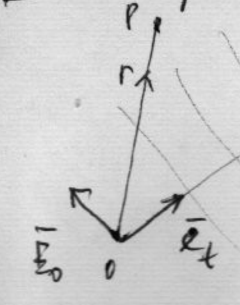
$$H_y(z,t) = \frac{E_0}{Z_0} \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega} z\right)\right)$$

$\Big\}$ $E^- = 0$, $E^+ \in \mathbb{R}_+ = E_0$

haladó hullám,

$\bar{E}$ és $\bar{H}$ fázisban van

Tetszőleges irányú terjedés



$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{-j\beta(\vec{r}\cdot\vec{e}_t)} = \vec{E}_0 \cdot e^{-j\vec{k}\vec{r}},$$

$$\vec{k} = \beta\,\vec{e}_t$$ hullámszám-vektor

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{Z_0}\cdot \vec{e}_t \times \vec{E}_0(\vec{r})$$

miért?

-szabadtérben:

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \vec{E}_n = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k_0 \vec{E} = 0$$ (vektor hullámegyenlet $i = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} + k_0^2 E_i = 0$$ (változók szeparálásával megoldható

$$E_x(x,y,z) = f(x)\cdot g(y)\cdot h(z) \xrightarrow[\text{elosztva } f\cdot g\cdot h\text{-val}]{\text{visszahelyett.}} \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{f} + \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}}{g} + \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}}{h} + k_0^2 = 0$$

csak akkor igaz, ha a tagok külön-külön egy-egy konstanssal egyenlőek: $\frac{\partial^2 f/\partial x^2}{f} = -k_x^2$; $\frac{\partial^2 f/\partial y^2}{g} = -k_y^2$; $\frac{\partial^2 h/\partial z^2}{h} = -k_z^2$

~~vagyis~~ és $$\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2}$$

az adódó egyenletek

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k_x^2 f = 0 \\ &\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + k_y^2 g = 0 \\ &\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + k_z^2 \cdot h = 0 \end{aligned}\right\}$$

$e^{\pm j k_x x}$, $e^{\pm j k_y y}$, $e^{\pm j k_z z}$ alakú megoldások

$+ \rightarrow$ a $+\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}$ irányba

$- \rightarrow$ a $-\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}$ irányba

$$E_x(x,y,z) = A \cdot e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

, ahol A tetszőleges konstans amplitúdó

$\vec{k} = k_x \cdot \hat{x} + k_y \cdot \hat{y} + k_z \cdot \hat{z} = k_0 \cdot \hat{n}$, ahol $k_0 = |\bar{k}|$, $\hat{n}$ a haladási irányba mutató e.v.

ha $\bar{r} = x \cdot \hat{x} + y \cdot \hat{y} + z \cdot \hat{z}$, akkor $\boxed{E_x = A\, e^{-j\bar{k}\bar{r}}}$

hasonlóan (B és C más konstans amplitúdók)

$$E_y = B \cdot e^{-j\bar{k}\bar{r}} \quad \text{és} \quad E_z = C \cdot e^{-j\bar{k}\bar{r}}$$

ahol x, y, z függősége azonos, mert a divergencia feltétel

$$\nabla \bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

ebből adódóan $\bar{E}_0 = A\hat{x} + B\hat{y} + C\hat{z}$ és $\bar{E} = \bar{E}_0 \cdot e^{-j\bar{k}\bar{r}}$

és $\nabla \cdot \bar{E} = \nabla(\bar{E}_0 e^{-j\bar{k}\bar{r}}) = E_0 \nabla e^{-j\bar{k}\bar{r}} = -j\underbrace{\bar{k} \cdot \bar{E}_0}_{=0 \text{ kell legyen}} e^{-j\bar{k}\bar{r}} \overset{!}{=} 0$ $\quad \boxed{\bar{k} \cdot \bar{E}_0 = 0}$

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} \rightarrow \bar{H} = \frac{j}{\omega\mu} \cdot \nabla \times \bar{E} = \frac{j}{\omega\mu_0} \cdot \nabla \times (\bar{E}_0 e^{-j\bar{k}\bar{r}}) = \frac{-j}{\omega\mu_0} E_0 \times \nabla e^{-j\bar{k}\bar{r}} =$$

$$= \frac{-j}{\omega\mu_0} \bar{E}_0 \times (-j\bar{k}) e^{-j\bar{k}\bar{r}} = \underbrace{\frac{k}{\omega\mu_0}}_{\frac{1}{\eta_0}} \cdot \hat{n} \times \bar{E}_0 e^{-j\bar{k}\bar{r}} = \frac{1}{\eta_0} \cdot \hat{n} \times \bar{E}_0 e^{-j\bar{k}\bar{r}} = \frac{1}{\eta_0} (\hat{n} \times \bar{E})$$

$\vec{H} \perp \hat{n}$ és $\vec{H} \perp \bar{E}$

Polarizáció

- lineárisan polarizált (ami eddig volt) – az elektromos tere egy fix irányba mutatott

(. Síkhullám polarizáltsága az elektromos tér irányítottságát jelenti)

- időben állandó
- időben változó

$$\bar{E} = (E_1 \hat{x} + E_2 \hat{y})\, e^{-jk_0 z}$$

legyen $E_1 = j E_2 = E_0$, $E_0 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\bar{E} = E_0 (\hat{x} - j\hat{y})\, e^{-jk_0 z}}$$

időtartományban

$$E(z,t) = E_0 \cdot \left[\hat{x} \cos(\omega t - k_0 z) + \hat{y} \cdot \cos\left(\omega t - k_0 z - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

az elektromos tér vektora az időben (egyenletesen a z-mentén) változik

pl. $z = 0$-nál

$$\bar{E}(0,t) = E_0 (\hat{x} \cdot \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t)$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\sin \omega t}{\cos \omega t}\right) = \omega t$$

$$\bar{H} = \frac{E_0}{\eta_0} \hat{z} \times (\hat{x} - j\hat{y}) e^{-jk_0 z} = \frac{E_0}{\eta_0} (\hat{y} + j\hat{x}) e^{-jk_0 z} = \frac{j E_0}{\eta_0} (\hat{x} - j\hat{y}) e^{-jk_0 z}$$

$$\bar{E} = \bar{E}_0 (\hat{x} + j\hat{y})\, e^{-jk_0 z}$$

E_1 és E_2 valós

$E_1 \neq 0$ és $E_2 = 0$ $\hat{x}$-irányban lineárisan polarizált

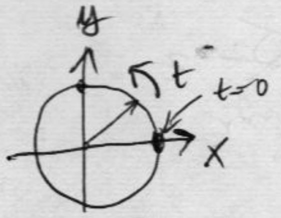
$E_1 = 0$ $E_2 \neq 0$ y-irányban lin. pol.

$E_1 \neq 0$ $E_2 = 0$ lineárisan polarizált, $\varphi = \arctg \frac{E_2}{E_1}$

ha $E_1 = E_2 = E_0$

$$\bar{E} = E_0 (\hat{x} + \hat{y})\, e^{-jk_0 z}$$

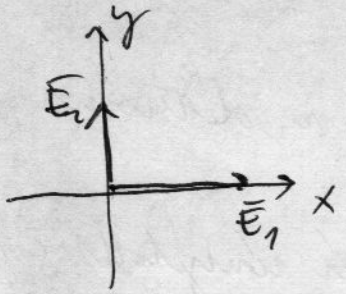
x-hez képest 45°-ban polarizált



RHCP

(right-hand circularly polarized)

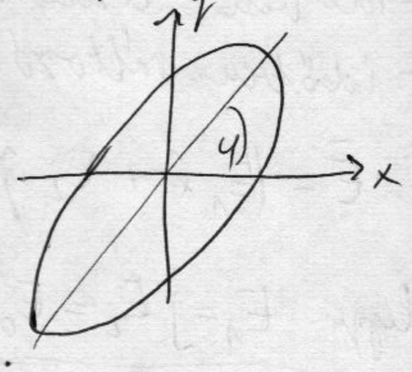
LHCP



$z=0$

$$\left.\begin{aligned} E_x(t) &= E_{x0}\cdot\cos(\omega t)\\ E_y(t) &= E_{y0}\cdot\cos(\omega t+\varphi)\end{aligned}\right\}\ \bar{E}=?$$

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2}+\frac{E_y^2}{E_{y0}^2}-\frac{2E_xE_y}{E_{x0}E_{y0}}\cdot\cos\varphi=\sin^2\varphi$$ ellipszis



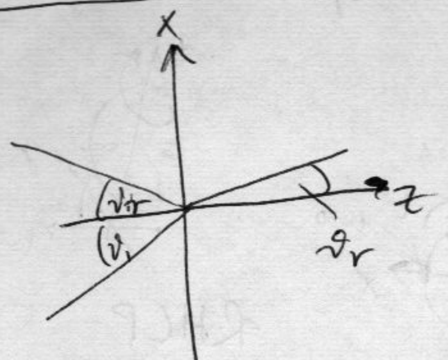
spec. 1) $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ és $E_{x0}=E_{y0}=E_0$

$E_x^2+E_y^2=E_0^2$. kör → cirkulárisan polarizált

2) $\varphi=\pi$

$\frac{E_x}{E_{x0}}+\frac{E_y}{E_{y0}}=0$ egyenes → lineárisan polarizált

Visszaverődés és törés



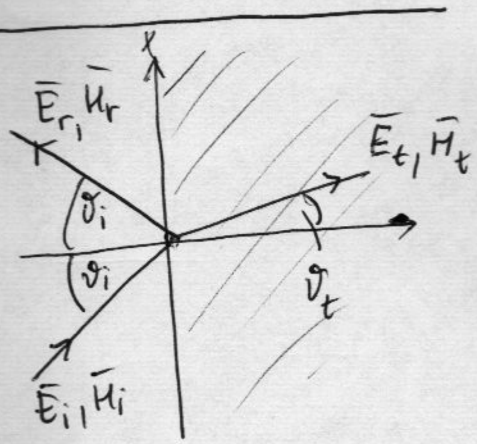
Snellius–Descartes

$\alpha_r=\alpha_i$

$$\frac{\sin\alpha_t}{\sin\alpha_i}=\frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}=\frac{n_1}{n_2}$$

Visszaverődés és törés - "Jurde beesés"

Poran p36 III/8a



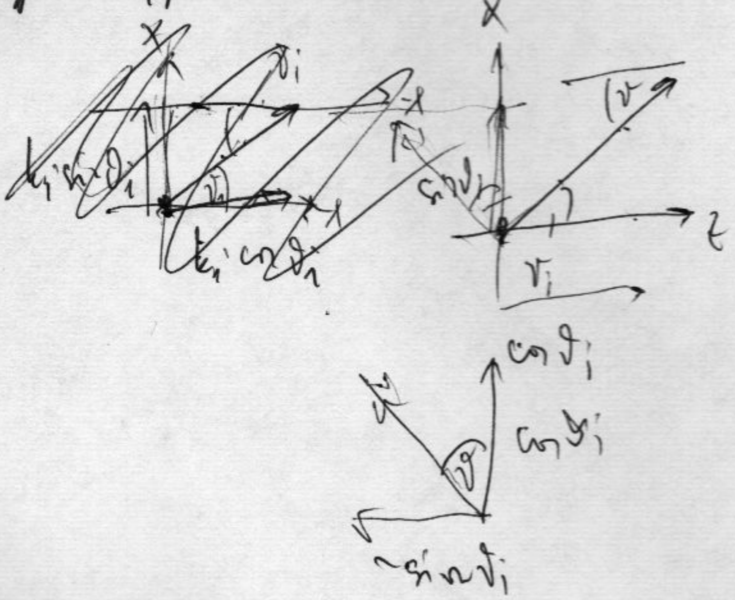
i - incident
r - reflected
t - ~~tte~~ transmitted

$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1} \; ; \; \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$$

"Parallel" polarization

$$\bar{E}_i = E_0 (\hat{x} \cdot \cos\vartheta_i - \hat{z} \cdot \sin\vartheta_i) e^{-jk_1(\hat{x}\sin\vartheta_i + \hat{z}\cos\vartheta_i)}$$

$$H_i = \frac{E_0}{\eta_1} \cdot \hat{y} \cdot e^{-jk_1(\hat{x}\sin\vartheta_i + \hat{z}\cdot\cos\vartheta_i)}$$



Energiaáramlás

• Komplex Poynting-vektor

$$\vec{E} = \vec{e}_x \cdot E_x + \vec{e}_y \cdot E_y + \vec{e}_z \cdot E_z$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times (\vec{H})^*$$

$$P + jQ = \oint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

$$P = \mathrm{Re}\left\{ \oint_A \vec{S}\, d\vec{A} \right\}$$

$Z_0 \in \mathbb{R}$

• Síkhullám

$$E_x(z) = E^+ e^{-j\beta z} = |E^+| e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta z} ; \quad H^+ = \frac{E^+}{Z_0}$$

$$H_y(z) = H^+ e^{-j\beta z} = |H^+| e^{j\varphi} \cdot e^{-j\beta z}$$

$E_x(z,t) = |E^+| \cos(\cancel{\beta t}\, \omega t - \beta z + \varphi)$ és $H_y(z,t) = |H^+| \cdot \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) = \left(\vec{e}_x E_x(z,t)\right) \times \left(\vec{e}_y H_y(z,t)\right) = \vec{e}_z \cdot S_z(z,t)$$

$$S_z(z,t) = |E^+| \cdot |H^+| \cdot \cos^2(\omega t - \beta z + \varphi) = \frac{1}{2}|E^+||H^+| + \frac{1}{2}|E^+||H^+| \cdot \cos(2\omega t - 2\beta z + 2\varphi)$$

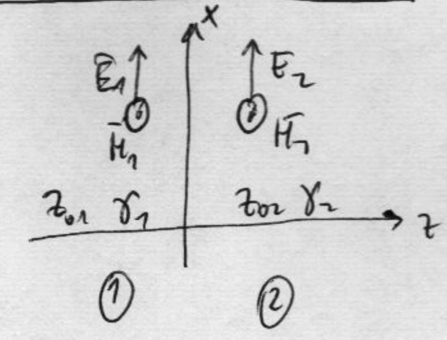
$$\boxed{S_{átl}(z) \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T S_z(z,t)\,dt = \frac{1}{2}|E^+||H^+|}$$

Számítható-e közvetlenül a komplex amplitúdóból?

$$S_{átl}(z) = \frac{1}{2} E_x(z) \cdot H_y^*(z) = \frac{1}{2}|E^+| e^{j\varphi} e^{-j\beta z} \cdot |H^+| e^{-j\varphi} e^{j\beta z}$$ módon jön ki!

→ bevezethetjük mi a komplex Poynting-vektor fogalmát (lásd fentebb)

Merőleges beesés



① $E_1(z) = E_1^+ e^{-\gamma_1 z} + E_1^- e^{\gamma_1 z}$

$H_1(z) = \dfrac{E_1^+}{Z_{01}} e^{-\gamma_1 z} - \dfrac{E_1^-}{Z_{01}} \cdot e^{\gamma_1 z}$

② $E_2(z) = E_2^+ e^{-\gamma_2 z}$

$H_2(z) = \dfrac{E_2^+}{Z_{02}} e^{-\gamma_2 z}$

határfeltétel: H_t és E_t folytonos

$z=0$ $\quad E_1(0) = E_2(0) \qquad E_1^+ + E_1^- = E_2^+$

$H_1(0) = H_2(0) \qquad \dfrac{E_1^+}{Z_{01}} - \dfrac{E_1^-}{Z_{01}} = \dfrac{E_2^+}{Z_{02}}$

} 2 ismeretlen meghatározható

reflexiótényező $\quad r_{12} \triangleq \dfrac{E_1^-}{E_2} = \dfrac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$

transzmissziós tényező: $\quad t_{21} \triangleq \dfrac{E_2^+}{E_1^+} = \dfrac{2 \cdot Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$

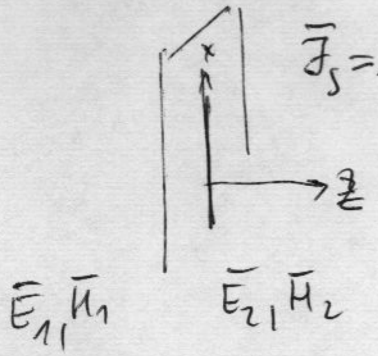
Síkhullám – távvezeték analógia

síkhullám: – lineárisan polarizált
– merőleges beesés

TV	U	I	R'	L'	G'	C'
SH	E	H	–	μ	σ	ε

TEM – transzverzális elektromos és mágneses hullám

Felületi áramok mint síkhullámok forrásai (p.23, Pozar) ↳ ideális antennák! III/6



$\bar{J}_s = \hat{x} \cdot J_0 \longrightarrow$ forrás nem változik x és y szerint csak $\pm z$ irányban haladó tér

① $\hat{n} \times (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = \hat{z} \times (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = 0$

② $\hat{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \hat{z} \times (H_2 - H_1) = J_0 \hat{x}$

② $\rightarrow \boxed{\bar{H} = H_y \cdot \hat{y}}$ és $\bar{E} \perp \bar{H}$ és $\bar{E} \perp \hat{z} \rightarrow \boxed{\bar{E} = E_x \cdot \hat{x}}$

$z < 0$

$$\bar{E}_1 = \hat{x} \cdot A \eta_0 \cdot e^{jk_0 z}$$

$$\bar{H}_1 = -\hat{y} A e^{jk_0 z}$$

$z > 0$

$$\bar{E}_2 = \hat{x} B \cdot \eta_0 \cdot e^{-jk_0 z}$$

$$\bar{H}_2 = \hat{y} \cdot B \cdot e^{-jk_0 z}$$

① $\rightarrow B - A = 0 \Rightarrow \boxed{A = B}$

② $\rightarrow -B - A = J_0 \rightarrow \boxed{A = -\frac{J_0}{2} = B}$

mert $\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$

$\hat{z} \times -\hat{y} = \hat{x}$