Lineáris egyenletrendszer megoldása

Két ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása

Reichardt, András

2017.09.05

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

Az alábbi, nem rendezett egyenletrendszerre jutottunk! Határozzuk meg U_1 és U_2 értékét!

$$\left.\begin{aligned} \frac{U_1}{20} + \frac{U_1 - 10}{30} + \frac{U_1 - U_2}{15} &= 0 \\ -0{,}9 + \frac{U_2 - U_1}{15} + \frac{U_2 - 15}{20} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

1. Rendezzük az egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{15}\right) U_1 - \frac{1}{15} U_2 &= \frac{10}{30} \\ -\frac{1}{15} U_1 + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{15}\right) U_2 &= 0{,}9 + \frac{15}{20} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 0{,}15 U_1 - 0{,}0667 U_2 &= 0{,}3333 \\ -0{,}0667 U_1 + 0{,}1167 U_2 &= 1{,}65 \end{aligned}\right\}$$

- Ha ilyen törtes együtthatók vannak akkor lehetséges a nevezők legkisebb közös többszörösével megszorozni az egyes egyenleteket, és akkor szép számokat kapunk. Például az első és a második egyenletet is 60-val szorozva adódik :

$$\left.\begin{aligned}(3+2+4)\,U_1 - 4U_2 &= 20\\ -4U_1 + (3+4)\,U_2 &= 54+45\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned}9U_1 - 4U_2 &= 20\\ -4U_1 + 7U_2 &= 99\end{aligned}\right\}$$

  Az így kapott egyenleteket (mivel most egész számokat kaptunk) egyszerűbb megoldani, ha nincsen segítségünkre számológép.

- A keresett változókat lehet **számológép** segítségével közvetlenül megkapni (használjuk a számológépen lévő egyenletrendszer megoldó módot) vagy valamilyen **kézi módszerrel** megoldani, esetleg **MATLAB segítségével** is megoldásra jutunk.
  Ha MATLAB alapú megoldást választunk, akkor mátrixos formába kell alakítani az egyenletrendszert, amelynek alakja az alábbi lesz :

$$\begin{pmatrix} 0{,}15 & -0{,}0667 \\ -0{,}0667 & 0{,}1167 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3333 \\ 1{,}65 \end{pmatrix}$$

Kézi megoldás 1. - Kifejezés-behelyettesítés

$$\left.\begin{aligned} 9U_1 - 4U_2 &= 20 \\ -4U_1 + 7U_2 &= 99 \end{aligned}\right\}$$

Fejezzük ki az első egyenletből az egyik változót (kiküszöböljük), majd az így kapott kifejezést helyettesítsük a második egyenletbe !

$$U_1 = \frac{20 + 4U_2}{9} \quad \rightarrow \quad -4 \cdot \frac{20 + 4U_2}{9} + 7U_2 = 99$$

$$U_2 \cdot \left(-\frac{16}{9} + 7\right) = 99 + \frac{4 \cdot 20}{9} \quad \rightarrow \quad U_2 = \frac{891 + 80}{-16 + 63} = \frac{971}{47} = 20{,}6596$$

Az eredményt felhaználva, visszahelyettesítéssel :

$$U_1 = \frac{20 + 4 \cdot 20{,}6596}{9} = 11{,}4043$$

Kézi megoldás 2. - Determináns módszer

$$\left.\begin{aligned} 9U_1 - 4U_2 &= 20 \\ -4U_1 + 7U_2 &= 99 \end{aligned}\right\}$$

Alkalmazzuk a determináns módszert! Az együtthatómátrix azon oszlopát helyettesítjük az állandó vektorral, ahányadik ismeretlent keressük! (Vigyázzunk a rendezés során az ismeretlenek sorrendjére!)

$$U_1 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -4 \\ 99 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{20 \cdot 7 - (-4) \cdot 99}{9 \cdot 7 - (-4) \cdot (-4)} = \frac{536}{47} = 11{,}4043$$

$$U_2 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 20 \\ -4 & 99 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{971}{47} = 20{,}6596$$

Matlab megoldás

Rendezzük a megoldandó egyenletrendszert mátrixos alakba, majd ez alapján hozzuk létre a megfelelő mátrixokat!

$$\begin{pmatrix} 0{,}15 & -0{,}0667 \\ -0{,}0667 & 0{,}1167 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3333 \\ 1{,}65 \end{pmatrix}$$

```
» A = [1/20+1/30+1/15 -1/15;-1/15 1/20+1/15];
» B = [10/30;0.9+15/20];
```

A megoldáshoz alkalmazhatjuk a balról osztást (backslash művelet) vagy az A inverzével balról történő szorzást.

```
» x = A \ B
```

Determináns módszer 3 változó esetében

A megoldandó egyenletrendszer az alábbi

$$\left.\begin{aligned} 3U_1 + 2U_2 - U_3 &= 2 \\ -1U_1 + 3U_2 &= 3 \\ 4U_2 - 5U_3 &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}\right\}$$

Az együtthatómátrix determinánsának (Δ_A) kiszámítása :

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 3 \cdot (3 \cdot (-5) - 0 \cdot 4) \\ -2 \cdot ((-1) \cdot (-5) - (0 \cdot 0)) \\ +(-1) \cdot ((-1) \cdot 4 - 3 \cdot 0) \end{matrix} = -51$$

Az első ismeretlen kiszámítása :

$$U_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 10 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{\Delta_A} = \frac{2 \cdot (-15) - 2 \cdot (-15) - 1 \cdot (-18)}{-51} = -0{,}3529$$

Determináns módszer 3 változó esetében (cont.)

Második ismeretlen :

$$U_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}}{\Delta_A} = \frac{3 \cdot (-15) - 2 \cdot 5 - 1 \cdot (-10)}{-51} = 0{,}8823$$

Harmadik ismeretlen :

$$U_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_A} = \frac{3 \cdot 18 - 2 \cdot (-10) + 2 \cdot (-4)}{-51} = -1{,}2941$$