Egyenletek rendezése és megoldása

1. Tekintsük az alábbi, lineáris egyenletekből álló egyenletrendszert! Oldjuk meg!

$$3x_1 + 2x_2 = -4 \tag{1}$$
$$2x_1 - 4x_2 = 3 \tag{2}$$

---

a. megoldás behelyettesítéssel :

$$3 \cdot (1): \quad 3x_1 = -4 - 2x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_2$$

$$2 \cdot (2): \quad 2 \cdot \left(-\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_2\right) - 4x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \left(-4 - \frac{4}{3}\right)x_2 = 3 + \frac{8}{3} = \frac{17}{3}$$

$$-\frac{16}{3}x_2 = \frac{17}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -\frac{17}{16} \simeq -1{,}0625}$$

$$x_1 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{17}{16}\right) = \frac{-64}{48} + \frac{34}{48} = -\frac{30}{48} = -\frac{10}{16}$$

$$\boxed{x_1 = -\frac{15}{24} \simeq 0{,}625}$$

Ellenőrzés :

$$3 \cdot \left(-\frac{15}{24}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{17}{16}\right) = \frac{-90 + 2 \cdot \cdot (-17)}{48} = -\frac{-192}{48} = -4$$

$$2 \cdot \left(-\frac{15}{24}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{17}{16}\right) = \frac{-60 + 12 \cdot 17}{48} = \frac{144}{48} = 3$$

b. másfajta megoldás

Szorozzuk az (1) egyenletet 2-vel, a (2) egyenletet -3-val és adjuk össze ezeket!

$$2 \cdot (3x_1 + 2x_2) - 3\,(2x_1 - 4x_2) = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot (3)$$

$$4x_2 + 12x_2 = 16x_2 = -8 - 9 = -17 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -\frac{17}{16}}$$

Hasonlóan, 2-szer (1) egyenletet összeadva (2)-vel :

$$2 \cdot (3x_1 + 2x_2) + (2x_1 - 4x_2) = 2 \cdot (-4) + 3$$

$$8x_1 = -8 + 3 = -5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -\frac{5}{8} = -\frac{15}{24}}$$

c. megoldás determináns módszerrel

Írjuk fel az egyenletrendszert mátrixos alakban :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_4 - a_2 \cdot a_3$$

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 2 = -16$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}}{detA} = \frac{(-4) \cdot (-4) - 2 \cdot 3}{-16} = \frac{10}{-16} = -\frac{5}{8}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{detA} = \frac{3 \cdot 3 - (-4) \cdot 2}{-16} = \frac{17}{-16} = -\frac{17}{16}$$

d. Determináns módszerrel általánosan (Cramer-szabály alapján)

Legyen a lineáris egyenletrendszer alakja :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

azaz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}$$

Ekkor a k. keresett változó (x_k) kifejezése

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$$

ahol $\det A$ az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa és $\det A_k$ az $\mathbf{A}_k$ mátrix determinánsa. Az $\mathbf{A}_k$ mátrixot úgy képezzük az $\mathbf{A}$ mátrixból, hogy a k. oszlopot kicseréljük a $\mathbf{B}$ vektorral. Ezzel a módszerrel az egyes ismeretlenek kiszámíthatóak anélkül, hogy az összes ismeretlent meg kellene határozni.

2. Három ismeretlenes egyenletrendszer

Az egyenletek felírása folyamán az alábbi egyenletrendszerre jutottunk, ahol j_1, j_2, j_3 az ismeretlenek.

$$\left.\begin{array}{rl} 5(j_1-j_2)+2(j_1-j_3)+3(j_1-j_2) & =0 \\ 4(j_2-j_3)+3(j_2-j_1)+5(j_2-j_1)-10 & =0 \\ 10j_3+4(j_3-j_2)+2(j_3-j_1) & =0 \end{array}\right\}$$

Rendezzük az egyes egyenleteket az ismeretlenek szerint egyenletenként.

$$\left.\begin{array}{cccc} (5+2+3)j_1 & +(-5-3)j_2 & +(-2)j_3 & =0 \\ (-3-5)j_1 & +(4+3+5)j_2 & +(-4)j_3 & =10 \\ (-2)j_1 & +(-4)j_2 & +(10+4+2)j_3 & =0 \end{array}\right\}$$

Innen egyetlen lépés a lineáris egyenletrendszert mátrixos alakban felírni :

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & -2 \\ -8 & 12 & -4 \\ -2 & -4 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oldjuk meg az egyes ismeretlenekre az egyenletrendszert! Ne felejtsük a determinánsok kifejtési tételét!

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & -8 & -2 \\ -8 & 12 & -4 \\ -2 & -4 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-8)\cdot \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -2 & 16 \end{vmatrix} + (-2)\cdot \begin{vmatrix} -8 & 12 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8\cdot(12\cdot 16 - 4\cdot 4) + 8\cdot(-8\cdot 16 - 4\cdot 2) - 2\cdot(-8\cdot(-4) - 12\cdot(-2)) =$$

$$= 8\cdot(192-16) + 8\cdot(-128-8) - 2\cdot(32+24) = 1408 - 1088 - 112 = 208$$

Az első ismeretlen (az A első oszlopát helyettesítjük) :

$$j_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -8 & -2 \\ 10 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 16 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{(-1)\cdot 10\cdot((-8)\cdot 16 - (-2)\cdot(-6))}{208} = \frac{1360}{208} = 6{,}5385$$

Második ismeretlen (A második oszlopát helyettesítjük) :

$$j_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 0 & -2 \\ -8 & 10 & -4 \\ -2 & 0 & 16 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1240}{208} = 5{,}9615$$

Harmadik ismeretlen :

$$j_3 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -8 & 12 & 10 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{480}{208} = 2{,}3077$$