1 Jelek és rendszerek 1. - első számítógépes gyakorlat

Oldjuk meg az alábbi feladatokat Matlab segítségével!

1.1 Válasz számítása

Feladat Tekintsük az ábrán látható hálózatot! Számí tsuk ki a bejelölt feszültség értékét a paraméterek értéke esetén!

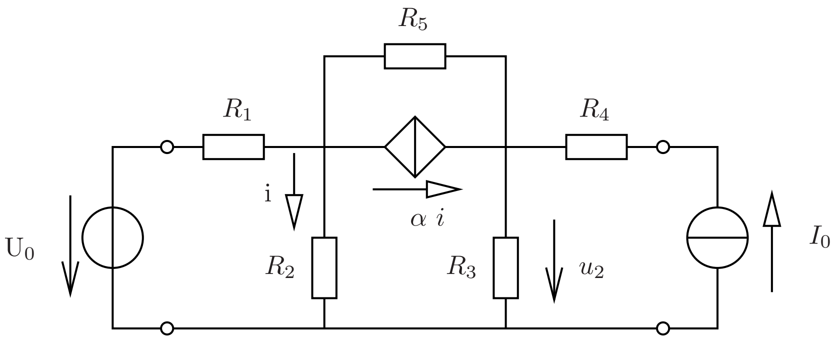

Figure 1: Megoldandó hálózat

A hálózati elemek paraméterei az alábbiak : $R_1 = 2$ kΩ, $R_2 = 3$ kΩ, $R_3 = 3$ kΩ, $R_4 = 5$ kΩ, $R_5 = 2$ kΩ, $U_0 = 12$ V, $I_0 = 20$ mA, $\alpha = 0,9$.

Megoldás Először írjuk fel a hálózati egyenleteket. Az alsó potenciál legyen 0. Ekkor az egyes potenciálok értékei φ_1 és φ_2. A keresett feszültség $u_2 = \varphi_2$. A vezérelt forrás vezérlő áramának (i) kifejezése : $i = \varphi_1/R_2$.

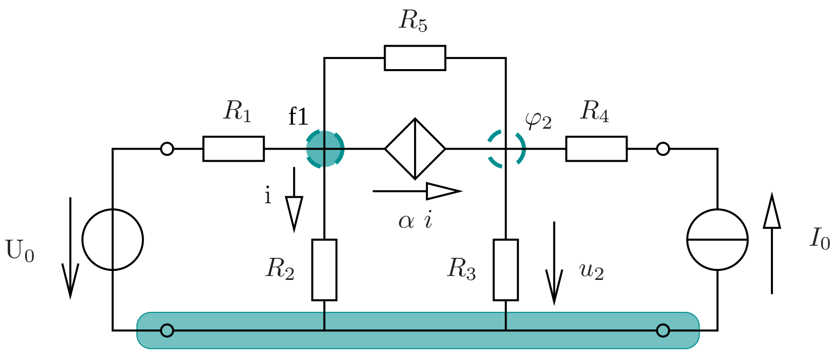

Figure 2: Csomóponti potenciálok felvétele a hálózatba

A csomópontokra felírt áramegyenletek az alábbiak :

$$\frac{\varphi_1 - U_0}{R_1} + \frac{\varphi_1}{R_2} + \alpha i + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_5} = 0$$
$$\frac{\varphi_2}{R_3} - I_0 - \alpha i + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_5} = 0$$

Ez rendezés után az alábbi alakot mutatja (a három változó a két csomóponti potenciál és a vezérlő áram) :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} & \alpha \\ -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} & -\alpha \\ -\frac{1}{R_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_0}{R_1} \\ I_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ennek megoldása

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,6069 \\ 38,9827 \\ 5,2023 \end{bmatrix}$$

Innen a keresett feszültség : $u_3 = 38,9827$V.

A források teljesítményének meghatározásához szükség van a feszültségforrás áramára (i_{Us}) és az áramforrás feszültségére (U_{is}).

$$i_{Us} = \frac{\varphi_1 - U_0}{R_1} = 1,8035mA$$

Az áramforrás felső pontjának potenciálja φ_3. Ekkor az áramforrás feszültsége $u_{is} = 0 - \varphi_3 = -\varphi_3$. Amely csomópontra felírt áramtörvény alapján :

$$\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_4} - I_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \varphi_3 = (\varphi_2 + I_0 R_4)$$

$$U_{is} = -(\varphi_2 + I_0 R_4) = -138,98V$$

A keresett teljesítmények : $P_{us} = U_s \cdot i_{us} = 21,6416$ mW illetve $P_{is} = I_0 \cdot u_{is} = -2779,6$ mW.

A megoldás a fel1.m file-ban található.

1.2 Parametrikus megoldás

Feladat : Határozzuk meg a bejelölt feszültség értéket az α paraméter különböző értékei esetén, majd ábrázoljuk a kapott eredményeket! Milyen ábrázolási módokat használhatunk?
Megoldás : A megoldás első lépéseként egy függvényt (fel2 néven) hozunk létre, amely az előző feladatbeli problémát oldja meg az α-t mint paramétert (a függvény szempontjából bemeneti változó) figyelembe véve. (lásd a fel2.m forráskódját) A teljes feladatot a fel3.m file oldja meg.

A fel2 függvény azonban csak egyetlen α érték esetén oldja meg a problémát, ezért a sok α értéket tartalmazó vektor minden elemére külön meg kell hívni a függvényt, a visszatérő értéket pedig egy vektorban kell szintén elmenteni.

A paramétervektor létrehozásakor választhatunk a lineárisan illetve a logaritmikusan ekvidisztáns (egyenlő távolságú) felosztás között. Az ábrázoláskor választhatunk a lineáris és a logaritmikus skálázás között.

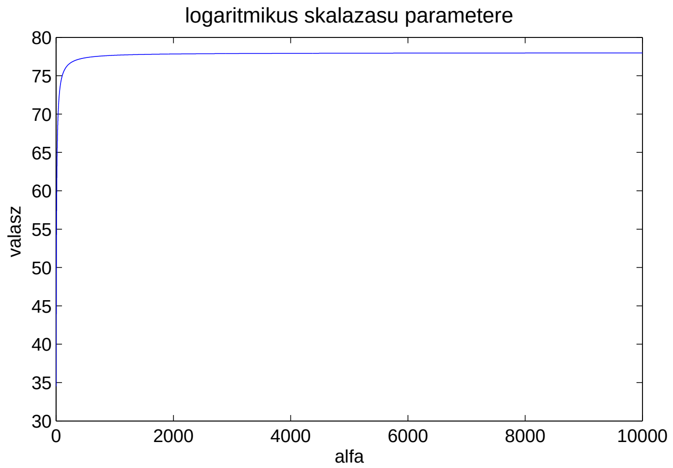

Figure 3: Lineáris skálázás alkalmazása

Az ábrázolás során célszerű a megfelelő módot alkalmazni.

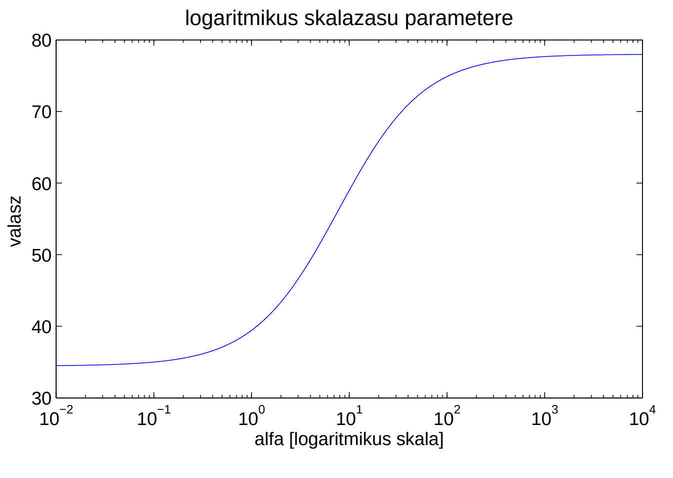

Figure 4: Logaritmikus skálázás alkalmazása (az y-skála lineáris)

1.3 Kékapu karakterisztika meghatározása

Feladat : Határozzuk meg az ábrán látható hálózat esetéb a hibrid karakterisztika (H-karakterisztika) értékét!

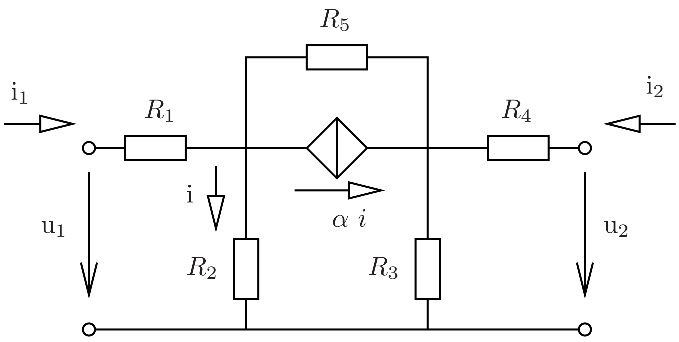

Figure 5: Hálózat kétkapu karakterisztika meghatározására

Megoldás : Célszerű a megoldás során kicsit más módon gondolkodni. A kétkapu változói (u_1, i_1, u_2, i_2) közül azokat amelyek a karakterisztika függő változói (H-karakterisztika esetén u_1 és i_2) a változókhoz soroljuk. A független változókat pedig paraméternek tekintjük és a csomóponti potenciálok megoldására vonatkozó lineáris egyenletrendszer jobb oldalát ezen paramétereknek a függvényeként írjuk fel.

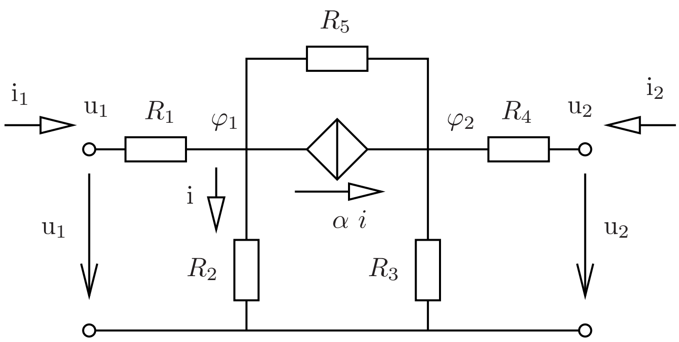

Figure 6: Csomóponti potenciálok kétkapu karakterisztika meghatározásához

Az egyenletrendszer alakja az alábbi lesz

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{u}$$

ahol $\mathbf{u}$ az i_1 és u_2 változókból alkotott vektor. A csomóponti potenciálokra vonatkozó csomóponti áramegyenletek az alábbiak :

$$\begin{aligned}
-i_1 + \frac{u_1-\varphi_1}{R_1} &= 0\\
-i_2 + \frac{u_2-\varphi_2}{R_4} &= 0\\
\frac{\varphi_1-u_1}{R_1} + \frac{\varphi_1}{R_2} + \alpha i + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{R_5} &= 0\\
\frac{\varphi_2}{R_3} + \frac{\varphi_2-u_2}{R_4} + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{R_5} - \alpha i &= 0\\
i - \frac{\varphi_1}{R_2} &= 0
\end{aligned}$$

amely az átrendezés után

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{R_4} & 0\\ -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} & \alpha\\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\alpha\\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1\\ i_2\\ \varphi_1\\ \varphi_2\\ i \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{R_4}\\ 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{R_4}\\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_1\\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

Innen az inverz képzés alapján a változókra a megoldás (`Q=inv(M)*N`)

$$\mathbf{x} = (\mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}$$

A kétkapu H-karakterisztikája a Q mátrix első két sora.
A `fel4.m` file futtatása után

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3400 & 0.1297 \\ -0.2075 & 0.1412 \\ 1.3400 & 0.1296 \\ 1.0374 & 0.2939 \\ 0.4466 & 0.0432 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Innen kiolvasható (`Q(1:2,1:2)`) a karakterisztika mátrixa

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 3.3400\ \mathrm{k\Omega} & 0.1297 \\ -0.2075 & 0.1412\ \mathrm{mS} \end{bmatrix}$$

2 Matlab source file-ok

2.1 fel1.m

```matlab
% Feladat leirasa a pdf file-ban
% Hatarozzuk meg a bejelolt feszultseg erteket a halozatban. Szamitsuk ki
% tovabba a forrasok teljesitmenyet is.

% Halozati parameterek megadasa
% [kOhm, V, mA] egysegrendszerben dolgozunk
R1 = 2; R2= 3; R3=3; R4=5; R5=2;
U0=12; I0=20; alfa = 0.9;

% Halozati egyenletek felirasa es normal alakra valo redukalasa utan
% a kapott linearis egyenletrendszer egyutthatoinak megadasa ..
a=[1/R1+1/R2+1/R5 -1/R5 alfa;-1/R5 1/R3+1/R5 -alfa;-1/R2 0 1];
b=[U0/R1;I0;0];

% ... majd az egyenletrendszer megoldasa
x = a \ b ;
fi1 = x(1);
fi2 = x(2);

% A megoldasvektorbol a megfelelo elem kivalasztasa
u2 = x(2);
disp(['u2 = ' num2str(u2)]);

% feszultsegforras arama
ius = (fi1-U0)/R1;
disp(['ius = ' num2str(ius)]);

% aramforras feszultsege
uis = - (fi2+I0*R4);
disp(['uis = ' num2str(uis)]);

% feszultsegforras teljesitmenye
Pus = U0 * ius;
disp(['Pus = ' num2str(Pus)]);

% aramforras teljesitmenye
Pis = I0 * uis;
disp(['Pis = ' num2str(Pis)]);
```

2.2 fel2.m

```
function [u2] = fel2(alfa)
% function [u2] = fel2(alfa)
% u2 : valasz (keresett feszultseg)
% alfa : bemeneti parameter
% Fuggveny, amely az alfa parameter egyetlen ertekere kiszamitja
% az u2 feszultseget

% Parameterek definialasa
R1 = 2; R2= 3; R3=3; R4=5; R5=2;
U0=12; I0=20;

% Egyenletrendszer egyutthatoinak megadasa
a=[1/R1+1/R2+1/R5 -1/R5 alfa;-1/R5 1/R3+1/R5 -alfa;-1/R2 0 1];
b=[U0/R1;I0;0];

% linearis egyenletrendszer megoldasa
x = a \ b ;

% keresett ertek visszaadasa
u2 = x(2);
```

2.3 fel3.m

```matlab
% fel3.m
% Szamitsuk ki es abrazoljuk a bejelolt feszultseg erteket az alfa
% parameter fuggvenyeben.

% Linearis skala
alfa = 0 : 0.1 : 1; % linearis skala
%alfa = linspace(0,1, 10); % linearis skala maskeppen
% A jo memoriahasznalat (es a gyors futas) miatt a valtozot elore
% lefoglaljuk.
uvlin = zeros(size(alfa));
% a fel2 fuggveny csak egyetlen alfa-ra kepes kiszamitani a valaszt
for i = 1:length(alfa)
    uvlin(i) = fel2(alfa(i));
end;
% linearis skalazas abrazolasa
alfalin = alfa;
% lin-lin skalas abrazolas
plot( alfalin, uvlin);
% x-skala es y-skala felirat
xlabel('alfa'); ylabel('valasz ');
% abra cimenek megadasa
title('u(alfa) fuggveny');


% logaritmikusan ekvidisztans ponteloszlas letrehozasa
alfa = logspace(-2,4,1e4);
% logaritmikus skalazasu parameter eseten a valasz valtozoja
uv = zeros(size(alfa));

% valasz szamitasa az alfa adott erteke eseten
for i=1:length(alfa)
    uv(i) = fel2(alfa(i));
end;

% abrazolas
figure;
% ... lin-lin skalan
plot(alfa,uv);
% tengely- es cim felirat elkeszitese az abrahoz
xlabel('alfa');
ylabel('valasz ');
title('logaritmikus skalazasu parametere');

% logaritmikus abrazolas
figure;
semilogx(alfa,uv);
xlabel('alfa [logaritmikus skala]');
ylabel('valasz ');
title('logaritmikus skalazasu parameter');
```

2.4 fel4.m

```
% fel4.m
% Ketkapu karakterisztika meghatarozasa

% Halozati parameterek megadasa
R1 = 2; R2= 3; R3=3; R4=5; R5=2;
U0=12; I0=20; alfa = 0.9;

% Egyenletrendszer egyutthato matrixa
M=[1/R1 0 -1/R1 0 0;...
                0 -1 0 -1/R4 0;...
                -1/R1 0 1/R1+1/R2+1/R5 -1/R5 alfa;...
                0 0 -1/R5 1/R3+1/R4+1/R5 -alfa;...
                0 0 -1/R2 0 1]

% es konstans vektora (ami ugyancsak egy matrix ebben az esetben)
N = [1 0;0 -1/R4;0 0;0 1/R4;0 0]

% Megoldas kiszamitasa
% M*x = N*u alaku egyenlet megoldasa
% x = Q * u = inv(M)*N*u , ahol Q=inv(M)*N
Q = inv(M)*N;
% a H karakterisztika a Q matrix elso 2x2-es almatrixa
HH = Q(1:2,1:2);
disp(HH);
```

A Vektorok, mátrixok

A Matlab alapértelmezésben minden adatot vektor illetve mátrix formátumban tárol. Erről kapta a nevét is[1].

Sorvektort adhatunk meg `a = [2 1 3]` módon

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Oszlopvektor megadásakor a ; (pontosvessző) alkalmazandó a ␣ helyett : `b = [2; 1; 3]`.

$$\mathbf{a} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$$

Transzponálás a ' (aposztróf) operátorral valósítható meg.

A mátrixok definíciója teljesen hasonló, hiszen csak több sorvektor egymás utáni definiálásaként vagy több oszlopvektor egymás után definiálását jelenti. Az egyes sorokon belül ␣választja el az elemeket, a sorok végén pedig ; (pontosvessző) áll. Például `m = [1 2 3;4 5 6;7 8 9]` módon definiálható az alábbi mátrix

$$\gtrdot = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Az egymással összeszorozható vektorok és mátrixok szorzása a * (csillag) operátorral valósítható meg. Például $a \cdot b$ elvégzése `a*b` módon tehető meg, és eredménye 14 lesz. Természetesen a `c=b*a` paranccsal a

$$c = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk eredményül.

A **c** és **m** mátrixok elemenként is összeszorozhatóak ($\mathbf{d} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{m}$) a .* (pont csillag) operátorral. Vagyis a d egyes elemeit kapjuk

$$d_{i,j} = c_{i,j} \cdot m_{i,j}$$

A mátrix determinánsa `det(d)` módon számítható, a mátrix inverze pedig `inv(d)` módon.

Az elemenként elvégzett szorzás mellett az elemenként elvégzett összeadás (.+), kivonás (`.-`), szorzás (`.*`), osztás (`./`) és hatványozás (`.^`) is alkalmazható a megfelelő dimenziójú mátrixok esetén.

Mátrixon bell̈ hivatkozhatunk egyes elemekre az elem sorszámai segítségével. Például **b** vektor második elemét b(2) módon érhetjük el. A **c** mátrix (3,2) sorszámú helyére `c(3,2)` módon hivatkozunk.

Speciális mátrixok hozhatóak létre a `zeros` és az `eye` parancsokkal. A `zeros` segítségével egy nullákkal feltöltött mátrixot kapunk. Általában a memóriában történő helyfoglalásra használjuk. A `p=zeros(3,5)` létrehoz egy 3 sorból és 5 oszlopból álló, nullákkal feltöltött mátrixot kapunk. Az `eye` egységmátrixot lehet létrehozni. Az `eye(3)` egy 3×3-as egységmátrixot hoz létre.

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A mátrixok létrehozható még egyféle módon. A korábban még létező r mátrixot létrehozzuk az `r(4,3)=3;` módon. Ekkor a (4,3) indexű elem értéke 3 lesz, a többi elem értéke pedig zérus.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[1] MatLab = Matrix Laboratory

B Egyenletrendszer megoldás

A Matlab egyik legfőbb alkalmazása lineáris egyenletrendszer megoldása numerikusan. Lineáris egyenletrendszer általános alakja

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A fenti forma leírható mátrix formalizmus alkalmazásával.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Ennek megoldása lehetséges a mátrix egyenlet megoldásával

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

módon. Ez egyrészről lehetséges az `x = inv(A)*b` paranccsal. Másrészről negoldható a lineáris egyenletrendszer a \ (backslash) parancssal lehetséges (`x = a \ b`) .

Példa Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$2x_1 - 3x_2 + 0.5x_3 = -2 \tag{1}$$

$$-0.2x_1 + 0.8x_2 + 1.2x_3 = 3 \tag{2}$$

$$0.3x_1 + 1.8x_2 + 2x_3 = 5 \tag{3}$$

Amely rendezett alakban

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0.5 \\ -0.2 & 0.8 & 1.2 \\ 0.3 & 1.8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Először az együttható mátrixot adjuk `a=[2 -3 0.5;-0.2 0.8 1.2;0.3 1.8 2]` , majd a konstans vektort `b = [-2; 3; 5]` . Ezek után a megoldás : `x = inv(a)*b`

A megoldás

$$x = \begin{pmatrix} -0.4919 \\ 0.6676 \\ 1.9730 \end{pmatrix}$$

C Ábrázolás

Egyszerű grafika a Matlab segítségével. A legtöbb esetben valamilyen függvényt szeretnénk ábrázolni, amelyet korábban adott pontokban kiszámítottunk. Ez az ábrázolási mód a 2 dimenziós grafika. Alapvetően a plot parancs alkalmazható. Ezzel mindkét koordináta tengelyen lineáris skálászást használunk.

Ha valamelyik tengelyen megfelelő a lineáris skála míg a másik tengelyre logaritmikus skálázást alkalmazunk, akkor alkalmazzuk a semilogx (x tengely logaritmikus) illetve a semilogy (y tengely logaritmikus). Ha mindkét tengelyen logaritmikus skálázást alkalmazunk akkor a loglog parancsot használjuk.

Példa 1 : Lineáris skála alkalmazása

Hozzunk létre egy idővektort, majd számítsuk ki

$$y(t) = 3e^{-0.7 \cdot t} \cdot cos(0.2 \cdot t)$$

kifejezést minden pontra.

```
t = 0:0.01:10;
y = 3*exp(-0.7.*t).*cos(0.2.*t);
```

Ezután ábraázoljuk lin-lin skála alkalmazásával

```
plot(t,y);
```

amit tengelyfeliratokkal (xlabel, ylabel) és címmel látunk el

```
xlabel('ido [s]');
ylabel('kiteres [m]');
title('Kiteres - ido osszefugges');
```

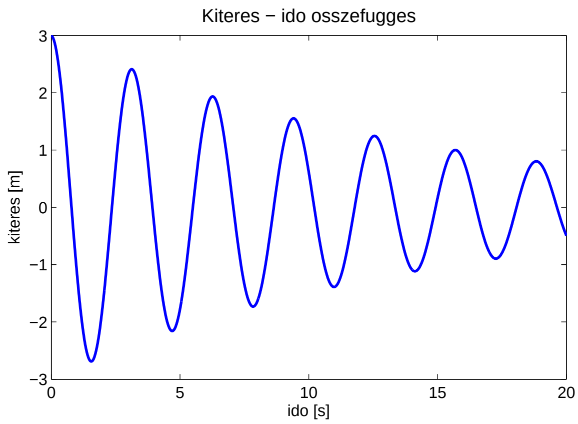

Figure 7: Lin-lin skálán történő ábrázolás eredménye