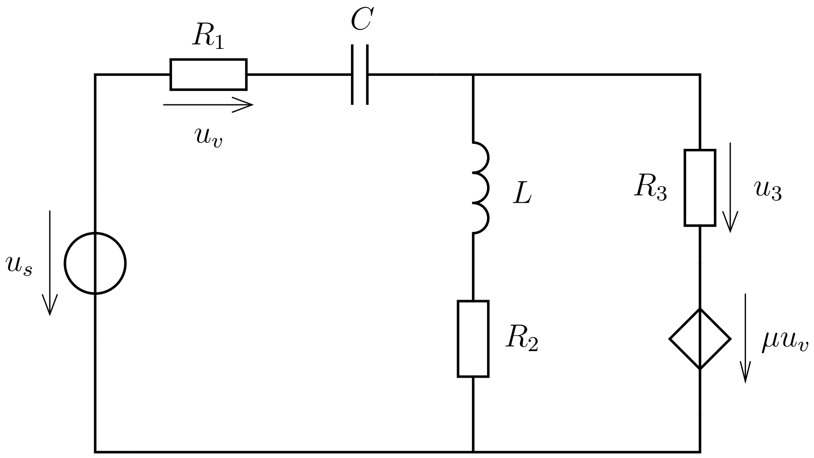
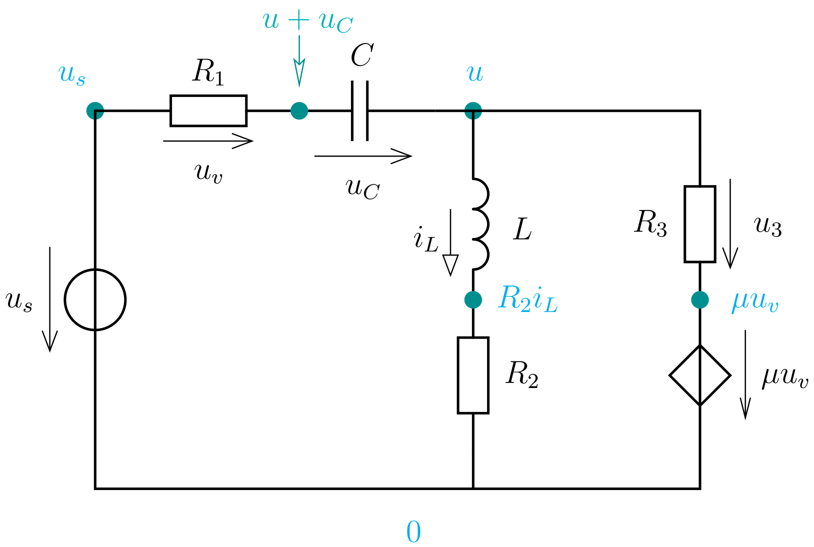
Feladat 1. Határozzuk meg az alábbi rendszer állapotváltozós leírását normálalakban!



A gerjesztés a feszültségforrás feszültsége (u_s), a válasz az R_3 ellenállás u_3 feszültsége!

Megoldás 1. : Induljunk ki a csomóponti potenciálokból és az állapotváltozókból! Elhelyezkedésüket mutatja a következő ábra



Ismeretlenek : u'_C, i'_L, u_3, u_v, u és a források u_C, i_L, u_s
Egyenletek

$$u_v = u_s - u - u_C$$

$$u_3 = u - \mu u_v$$

$$C u'_C + \frac{u + u_C - u_s}{R_1} = 0$$

$$u - L i'_L - i_L R_2 = 0$$

$$-C u'_C + i_L + \frac{u - \mu u_v}{R_3} = 0$$

Rendezzük

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ C\,R_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -L & 0 & 0 & 1 \\ -C\,R_3 & 0 & 0 & -\mu & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mu & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'_C \\ i'_L \\ u_3 \\ u_v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \\ u_s \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{C\,(R_1+R_3+R_1\,\mu)} & -\dfrac{R_3}{C\,(R_1+R_3+R_1\,\mu)} \\ -\dfrac{R_3+R_1\,\mu}{L\,(R_1+R_3+R_1\,\mu)} & -\dfrac{R_1\,R_2-R_1\,R_3+R_2\,R_3+R_1\,R_2\,\mu}{L\,(R_1+R_3+R_1\,\mu)} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{C\,(R_1+R_3+R_1\,\mu)} \\ \dfrac{R_3+R_1\,\mu}{L\,(R_1+R_3+R_1\,\mu)} \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} -\dfrac{R_3}{R_1+R_3+R_1\,\mu} & \dfrac{R_1\,R_3\,(\mu+1)}{R_1+R_3+R_1\,\mu} \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{R_3}{R_1+R_3+R_1\,\mu}$$

Nézzük meg azt a speciális esetet, amikor $R_1 = R_2 = R_3 = R$

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{(2+\mu)CR} & -\dfrac{1}{(2+\mu)C} \\ -\dfrac{\mu+1}{L(2+\mu)} & -\dfrac{R}{L}\,\dfrac{1+\mu}{2+\mu} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(2+\mu)RC} \\ \dfrac{1+\mu}{L(2+\mu)} \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2+\mu} & \dfrac{R(1+\mu)}{2+\mu} \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2+\mu}$$

Megjegyzés : Miért így választottuk meg az ismeretleneket és rendeztük ilyen alakba a változókat?

Az állapotváltozókat az egyenletek felírásának szempontjából forrásnak tekintjük, és csak a deriváltjaikat tekintettük ismeretlennek. Ha ezt a fenti elrendezést alkalmazzuk, akkor az állapotváltozós leírás normálalakjában szereplő együtthatómátrixokat a megoldásvektorból egyértelműen megkapjuk.

$$\big(n\times n\big)\cdot\big(n\times 1\big) = \big(n\times 3\big)\cdot\big(3\times 1\big)$$

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{s} \quad\rightarrow\quad \mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{s} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{s}$$

ahol $\mathbf{M}$ az egyenletrendszer baloldalának együtthatóiból alkotott mátrix, $\mathbf{N}$ ugyanazon egyenletrendszer jobboldalának együtthatóiból alkotott mátrix, $\mathbf{w}$ a változókból alkotott vektor, amelynél az első nx változó az állapotváltozók deriváltja $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{nx})$, majd a válaszok változói $(y_1, y_2, \ldots, y_{ny})$, és ezutána többi ismeretlen. Az $\mathbf{s}$ jelölis a "források" vektorát, amely először az állapotváltozókat tartalmazza, majd a független forrásokat.

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_{nx} \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{ny} \\ \text{egyéb} \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{nx} \\ u_s \\ \vdots \\ i_s \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Például a fenti példának megfelelően az állapotváltozók u_C és i_L, a válasz u_3, a többi változó u_v, u, az egyetlen független forrás u_s.

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u'_C \\ i'_L \\ u_3 \\ u_v \\ u \end{pmatrix} ; \qquad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \\ u_s \end{pmatrix}$$

A korábbi $\mathbf{P}$ alakja az alábbi lesz

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C^T} & \mathbf{D} \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{cc|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$$