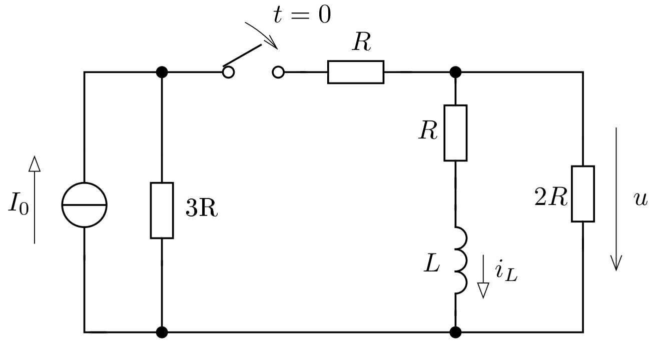
Ajánlott feladatok a 7. hét gyakorlatára
Állapotváltozós leírás megoldása összetevőkre bontással

1. Az ábrán látható hálózatban a kapcsoló t=0 pillanatig nyitva van. A kapcsolót t=0-ban zárjuk. A válasz a bejelölt u feszültség.

a. Határozzuk meg a kapcsoló zárt állásánál a hálózat állapotváltozós leírásának normálalakját!

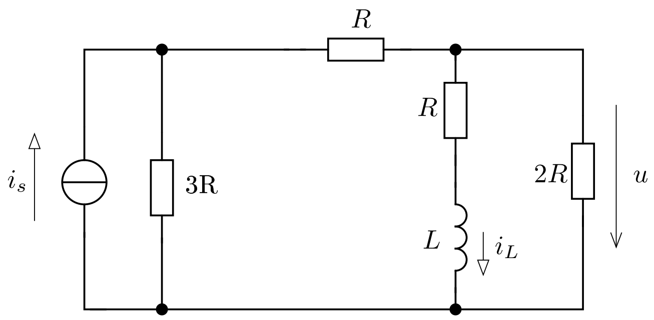
b. Állapítsuk meg az állapotváltozó és a válasz értékét a hálózat alapján $t = -0$ és $t = +0$ pillanatokban! Számítsuk ki a válasz Δu ugrását a $t = 0$ pillanatban!

c. Határozzuk meg a válasz u(t) időfüggvényét!



---

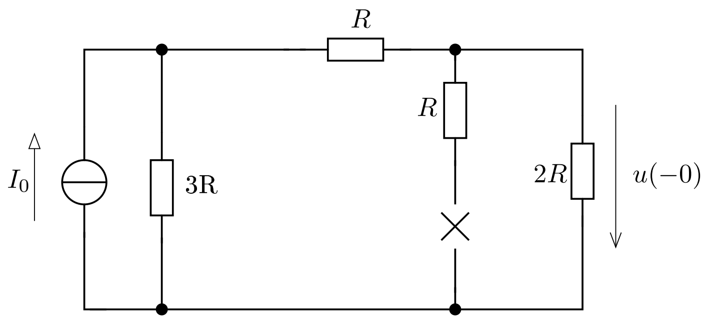
a.



$$\left.\begin{aligned} -i_s + \frac{u_v}{3R} + \frac{u_v - u}{R} &= 0 \\ \frac{u - Li_L'}{R} &= i_L \\ i_L + \frac{u}{2R} + \frac{u - u_v}{R} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u_v &= \frac{3u}{4} + \frac{3R}{4}i_s \\ u &= -\frac{4R}{3}i_L + R \cdot i_s \\ \frac{i_L}{dt} &= -\frac{7R}{3L}i_L + \frac{R}{L}i_s \end{aligned}}$$

b. $t < 0$ esetén energiamentes a hálózat, ezért $i_L(-0) = 0$ és $u(-0) = 0$

Az állapotváltozó folytonos, mert a gerjesztés korlátos, ezért a $t = +0$-ra vonatkozó hálózatban a tekercs helyett szakadás van.



Innen $u(-0) = I_0 \frac{1}{2} \cdot 2R = I_0 \cdot R$. A feszültség ugrása $\boxed{\Delta u = u(+0) - u(-0) = I_0 R}$.

c. $x = x_f + x_g$ alakú megoldás

A hálózat sajátértéke $\lambda = -\frac{7R}{3L}$.

A gerjesztett összetevő hasonló a gerjesztéshez, ami a $t > 0$ esetén állandó. A próbafüggvény a nem-zérus állandó lesz : $x_g = I_L$. Ebből (a csak a gerjesztett összetevőt tartalmazó állapotváltozóra vonatkozó diff. egyenletbe helyettesítve)

$$\frac{d}{dt} I_L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = -\frac{7R}{3L} I_L + \frac{R}{L} I_0 \qquad \Rightarrow \qquad I_L = \frac{3I_0}{7}$$

Az állapotváltozó $t = +0$-beli kezdeti értékére vonatkozóan korábban $i_L(+0) = 0$ adódott. A teljes megoldás

$$i_L(t) = i_{L,tr} + i_{L,g} = K \cdot e^{\lambda \cdot t} + \frac{3I_0}{7}$$

összefüggés $t \Rightarrow 0+$ határértéket képezve, adódik

$$0 = K + \frac{3I_0}{7} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{K = -\frac{3I_0}{L}}$$

Az állapotváltozó $t > 0$ esetén

$$i_L(t) = \frac{3I_0}{7} \left(1 - \exp\left(-\frac{7R}{3L} t\right)\right)$$

A keresett u feszültség időfüggése behelyettesítéssel adódik $t > 0$-ra

$$i_L(t) = -\frac{4R}{3} i_L + R \cdot i_s = -\frac{4R}{3} \cdot \frac{3I_0}{7} \left\{1 - \exp\left(-\frac{7R}{3L} t\right)\right\} = \frac{3RI_0}{7} + \frac{4RI_0}{7} \cdot e^{-t/\tau}, \qquad \text{ahol } \tau = \frac{3L}{7R}$$

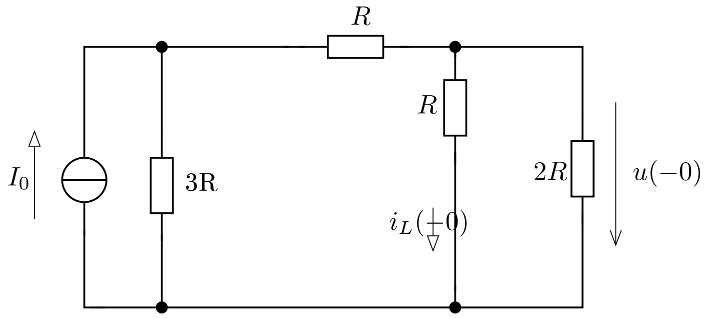
2. Tekintsük az előző feladat hálózatát, de a kapcsolót t=0 pillanatban nyitjuk.

a. Számítsuk ki az u feszültség ugrását a kapcsoló nyitásakor !

b. Határozzuk meg a válasz u(t) időfüggvényét!

---

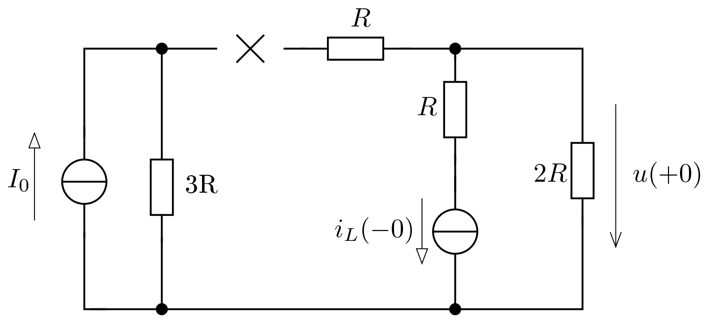
a. (A $t = -0$-beli állapot megfelel az előző feladat állandósult állapotának!)
$t < 0$ esetben a tekercs rövidzárként viselkedik a hosszú ideje lévő állandó gerjesztés hatására



$$u(-0) = 3RI_0 \cdot \frac{R \times 2R}{3R + R + R \times 2R} = 3RI_0 \frac{2R/3}{14R/3} = \frac{3RI_0}{7}$$

$$i_L(-0) = \frac{3I_0}{7}$$

$t = +0$-ban a tekercs egy pillanatra áramforrásként viselkedik ($i_L(-0)$ értékkel)



A hálózat bal oldali része "eltűnik" a mi szempontunkból.

$$u(+0) = -2R \cdot i_L(-0) = -\frac{3I_0}{7} \cdot 2R = -\frac{6I_0R}{7}$$

$$\Delta u = u(+0) - u(-0) = -\frac{6RI_0}{7} - \frac{3RI_0}{7} = -\frac{9RI_0}{7}$$

b. Időfüggés megállapítása : A tekercs áramának kezdeti értéke $i_L(0) = \frac{3I_0}{7}$
Az állapotváltozós leírás :

$$\frac{d}{dt} i_L = -\frac{3R}{L} i_L \qquad \text{és} \qquad u = -2R \cdot i_L$$

A sajátérték : $\lambda = -\frac{3R}{L}$, a gerjesztett válasz (a gerjesztés 0!) 0.
Illesztés a $t = +0$ pillanatra

$$\frac{3I_0}{7} = K \cdot e^{-3R/L \cdot t}\Big|_0 + 0 = K \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{3I_0}{7}$$

A teljes megoldás az állapotváltozóra ($t > 0$) : $i_L(t) = \frac{3I_0}{7} \cdot \exp\left(-\frac{3R}{L}t\right)$
A feszültség időfüggése ($u = -2R \cdot i_L$ alapján)

$$u(t) = -2R \cdot \frac{3I_0}{7} \cdot e^{-\frac{3R}{L}t}, t > 0$$

3. Számítsuk ki a bejelölt i áram ugrását az alábbi hálózat esetén, ha az feszültségforrás feszültségének időfüggvénye

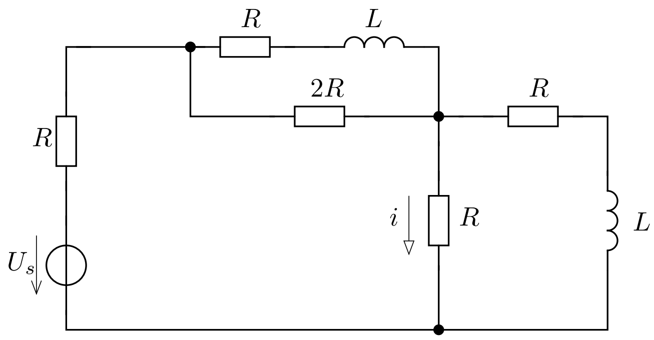
a.

$$U_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ U_0 & t > 0 \end{cases}$$

b.

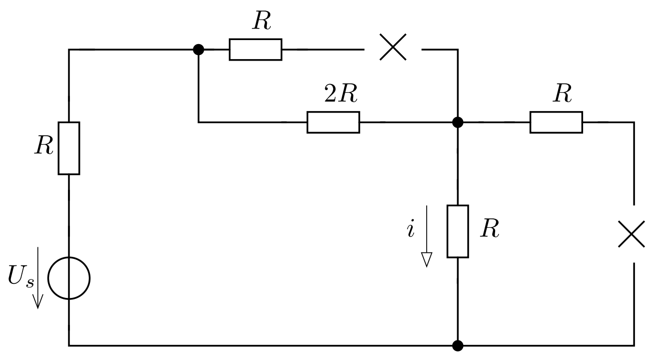
$$U_s(t) = \begin{cases} U_0 & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

(Ha konkrét számértékekkel szeretnénk számolni, akkor legyen $U_0 = 10$ V, R=500 Ω, L = 2 mH.)



---

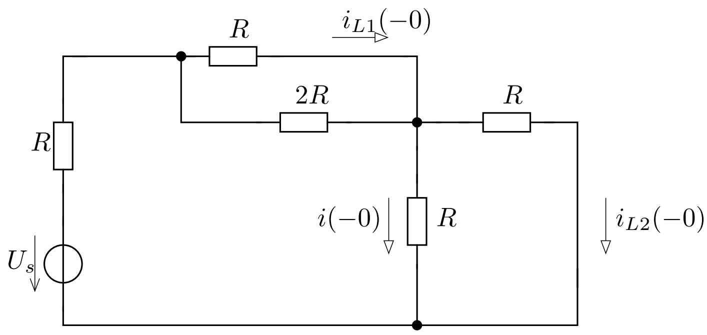
a. $t < 0$ esetben a hálózat energiamentes, ezért a tekercsek áramai zérusok, a válasz is zérus
$t = +0$-ban a tekercseket szakadások (zérus áramú áramforrások!) helyettesítik és adódik



$$i(+0) = \frac{U_0}{R + 2R + R} = \frac{U_0}{4R}$$

Az áramugrás értéke $\Delta i = i(+0) - i(-0) = \frac{U_0}{4R} = \frac{10V}{500\Omega} = 20mA$

b. A $t < 0$ esetében a tekercseket rövidzár helyettesíti, ezért adódik (U_R jelölje az R feletti csomópont potenciálját)

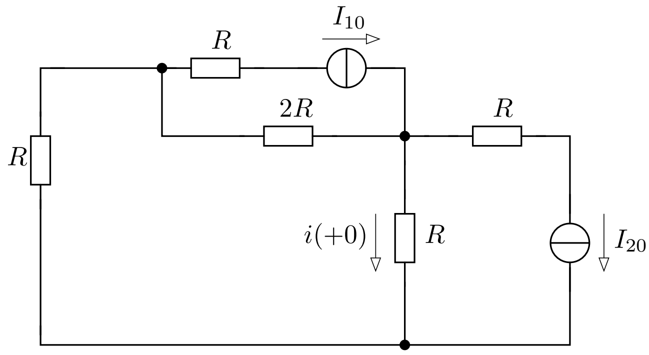


$$U_R = U_0 \cdot \frac{R \times R}{R + (R \times 2R) + (R \times R)} = U_0 \cdot \frac{R/2}{R + 2R/3 + R/2} = \frac{3}{13} U_0$$

$$i(-0) = i_{L2}(-0) = \frac{3U_0}{13R}$$

$$i_{L1}(-0) = \frac{1}{R} \cdot \frac{R \times 2R}{R + (R \times 2R) + (R \times R)} U_0 = \frac{4U_0}{13R}$$

A kiszámított tekercs áramokkal és a gerjesztés értékvel (=0, ezért rövidzár helyettesíti) a $t = +0$-beli helyettesítő kapcsolás



A bal felső csomópont potenciálja U_v, az R felső csomópontjáé U.

$$\left.\begin{aligned} 3U - U_v + 3RI_{20} - 3RI_{10} = 0 \\ 3U_v - U + 2RI_{10} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} U_v &= -\frac{3R}{8}(I_{10} + I_{20}) \\ U &= \frac{R}{8}(9I_{10} - 11I_{20}) \end{aligned}}$$

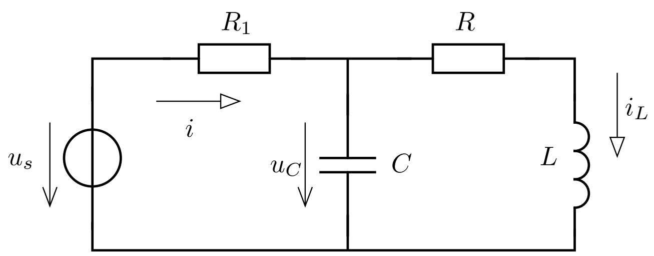
$$i(+0) = \frac{U}{R} = \frac{9}{8} I_{10} - \frac{11}{8} I_{20} = \frac{3U_0}{8 \cdot 13R}$$

$$\Delta i = i(+0) - i(-0) = \frac{3U_0}{8 \cdot 13R} - \frac{3U_0}{13R} = -\frac{21U_0}{104R}$$

4. Az alábbi hálózatban a forrásfeszültség időfüggvénye

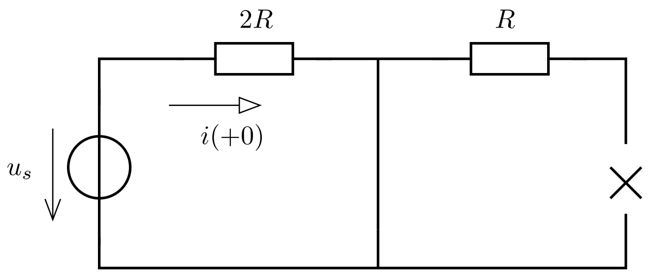
$$u_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ U_0 & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

Határozzuk meg az i áram időfüggvényét, ha $R_1 = 2R$, $R = 2k\Omega$, $L = 4$ mH, $C = 5$ nF, $U_0 = 60$ V.



Használjuk a feladat által adott állapotváltozókat, u_C-t és i_L-t! A számértékekkel történő számoláshoz alkalmazzuk az alábbi koherens egységrendszert : V, kΩ, mA, mH, μs, nF.

- Elsőként határozzuk meg az állapotváltozók kezdeti értékét! A kezdetben energiamentes hálózat miatt a $t = -0$ pillanatban $u_C(0) = 0$ és $i_L(0) = 0$ adott. A $t = +0$-ra vonatkozó helyettesítő kapcsolás



$$i(+0) = \frac{U_0}{2R} = \frac{60}{4} = 15 \text{ mA}$$
$$\Delta i = i(+0) - i(-0) = 15 \text{ mA}$$

- Az állapotváltozós leírás előállításához a kondenzátor felső csomópontjának potenciálja u_C, a feszültségforrásé u_s, a tekercsé $L \cdot i'_L$. Ekkor

$$Cu'_C + i_L + \frac{u_C - u_s}{2R} = 0; \qquad u_c - i_L - L \cdot i'_L = 0; \qquad i = \frac{u_s - u_C}{2R} = 0$$

Amiből $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix}$ választással adódik, hogy

$$\frac{d}{dt}u_C = -\frac{1}{2RC}u_C - \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{2RC}u_s$$
$$\frac{d}{dt}i_L = \frac{1}{L}u_C - \frac{R}{L}i_L$$
$$i = -\frac{1}{2R}u_C + \frac{1}{2R}u_s$$

A számértékek felhasználásával

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0,05 & -0,2 \\ 0,25 & -0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0 \end{pmatrix} u_s \\ i &= \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + 0,25u_s \end{aligned}}$$

- Sajátértékek és sajátvektorok (pl. MATLAB `[m,la] = eig(A)` parancs használatával vagy a feladat végén látható módon)

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda + 0{,}05 & 0,2 \\ -0,25 & \lambda + 0{,}5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda{+}0,05)(\lambda{+}0,5){-}0,2{\cdot}(-0,25) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2{+}0,55\lambda{+}0,075 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1 = -0,25\ \mu\text{s}^{-1}; \lambda_2 = -0{,}3\ \mu\text{s}^{-1}}$$

A sajátvektorok (normálva 1-re)

$$\lambda_1 \to \mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7070 \\ 0,7070 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \lambda_2 \to \mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{41} \\ 5/\sqrt{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6246 \\ 0,7808 \end{pmatrix}$$

- Az állandósult (gerjesztett) összetevőt a gerjesztéshez hasonló alakú próbafüggvény alakjában keressük. Most a gerjesztés állandó a vizsgált tartományban ezért az egyes állapotváltozókhoz tartozó próbafüggvények konstansok :

$$\mathbf{x}_g = \begin{pmatrix} u_{Cg} \\ i_{Lg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_C \\ I_L \end{pmatrix}$$

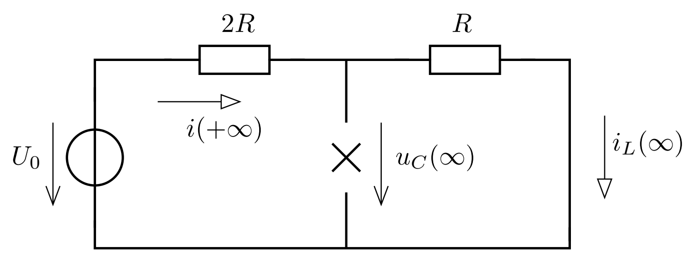
Az állapotváltozós leírásba visszahelyettesítve feltételezve, hogy a tranziens már lezajlott és felhasználva, hogy a konstans deriváltja zérus adódik

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_g + \mathbf{B} \cdot U_0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_g = -\mathbf{B}U_0$$

ami egy lineáris egyenletrendszer. Ennek megoldása (pl. MATLAB : `xg = A (-B*U0)` módon)

$$\boxed{\mathbf{x}_g = \begin{pmatrix} U_C \\ I_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

- Ellenőrizzük az eredményt a hálózat alapján! A konstans gerjesztés hatására a tranziens lezajlása után a kondenzátor feszültsége állandó lesz, ezért az árama zérus, úgy viselkedik mint egy szakadás. A tekercs esetében annak árama lesz állandó, ezért feszültsége zérus, ezáltal rövidzárként viselkedik. Ennek felhasználásával a $t \to$ esetre vonatkozóan az alábbi helyettesítő kapcsolást kapjuk, amiből a kondenzátor feszültsége és a tekercs árama is kiszámítható.



$$i_L(\infty) = \frac{U_0}{2R+R} = \frac{U_0}{3R} = 10\ \text{mA} \qquad u_C(\infty) = \frac{R}{2R+R}U_0 = \frac{U_0}{3} = 20\ \text{V}; \quad i(\infty) = i_L(\infty) = 10\ \text{mA}$$

Ez megegyezik az állapotváltozós leírásból kapott eredményünkkel!

- A teljes megoldás kifejezése az alábbi

$$\mathbf{x} = \mathbf{m}_1 \cdot k_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot} + \mathbf{m}_2 \cdot k_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot} + \mathbf{x}_g$$

- A megoldást illeszteni kell a $t = 0$ pillanatra, ezért (felhasználjuk a korábban kiszámított kezdeti értéket és a teljes megoldás t=0 értékét számítjuk

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{m}_1 \cdot k_1 + \mathbf{m}_2 \cdot k_2 + \mathbf{x}_g \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{x}_g$$

Ennek megoldása (pl. `kk = m  (-xg)`) adja a keresett k_1 és k_2 konstansokat

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -84{,}853 \\ 64{,}031 \end{pmatrix}$$

- Most már összeállítható az állapotváltozókra vonatkozó megoldás ($t > 0$)

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0,7070 \\ 0,7070 \end{pmatrix} \cdot (-84{,}853) \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} + \begin{pmatrix} 0,6246 \\ 0,7808 \end{pmatrix} \cdot (64{,}031) \cdot e^{-0{,}3 \cdot t} + \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

A kijelölt műveletek elvégzése után, a válasz kifejezésébe a kiszámított állapotváltozó függvényeket helyettesítve adódik $t > 0$-ra

$$x_1(t) = u_C(t) = \Big(-60 \cdot e^{-t/4} + 40 \cdot e^{-t/3{,}33} + 20\Big)\,\mathrm{V}$$
$$x_2(t) = i_L(t) = \Big(-60 \cdot e^{-t/4} + 50 \cdot e^{-t/3{,}33} + 10\Big)\,\mathrm{mA}$$
$$y(t) = i(t) = \Big(15 \cdot e^{-t/4} - 10 \cdot e^{-t/3{,}33} + 10\Big)\,\mathrm{mA}$$

Kiegészítés : Sajátvektorok kiszámítása
A sajátvektorok és sajátértékek a sajátérték egyenlet megoldásai :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{m} = \lambda \cdot \mathbf{m}$$

A sajátértékek ismeretében kiszámítható a sajátvektor.

$$\lambda_1 = -0{,}25; \rightarrow \begin{pmatrix} -0,05 & -0,2 \\ 0,25 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{1a} \\ m_{1b} \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} m_{1a} \\ m_{1b} \end{pmatrix}$$

Ez két összefüggő, lineáris egyenlet, ezért az egyik komponenst szabadon választjuk pl. $m_{1a} = 1$, amiből $-0{,}05 \cdot 1 - 0,2 m_{1b} = -0{,}25 \cdot 1 \Rightarrow m_{1b} = \frac{-0{,}05+0{,}25}{0{,}2} = 1$ adódik. Ezt még be szokás normálni, ezért

$$\mathbf{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7070 \\ 0{,}7070 \end{pmatrix}$$

A második sajátvektor hasonlóan számítható

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_2 = \lambda_2 \cdot \mathbf{m}_2 \Rightarrow -0{,}05 m_{2a} + (-0{,}2) m_{2b} = -0{,}3 \cdot m_{2a}$$

$$m_{2a} = 1 \quad \Rightarrow \quad m_{2b} = \frac{-0{,}05 + 0{,}3}{0{,}2} = 1{,}25$$

$$\text{normálással : } \mathbf{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (5/4)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}25 \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6246 \\ 0{,}7808 \end{pmatrix}$$

Nem kell mindenképpen normálni a sajátvektorokat, mert csak a tranziensben szereplő k konstansok értéke fog változni. A különböző numerikus programok általában elvégzik ezt a normálást.

5. Oldjuk meg az előző feladatot, ha a forrásfeszültség időfüggvénye

$$u_s(t) = \begin{cases} U_0 & \text{ha } t < 0 \\ 0 & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

Használjuk fel az előző feladat eredményeit!
A jelen feladat gerjesztése felírható az alábbi módon is :

$$u_s(t) = U_0 + (1 - \varepsilon(t))(-U_0)$$

azaz mintha az előző feladatbeli gerjesztés (-1)-szerese gerjesztést alkalmaznánk egy állandó U_0 gerjesztésre szuperponálva! Mivel lineáris a hálózat ezért a szuperponálás alkalmazható és a gerjesztések hatását különkülön vizsgálhatjuk.

$$u_s(t) = u_{s,a}(t) + u_{s,b}(t) \Rightarrow i(t) = i_a(t) + i_b(t); \qquad \text{ahol } u_{s,a}(t) \Rightarrow i_a(t) \text{ és } u_{s,b}(t) \Rightarrow i_b(t)$$

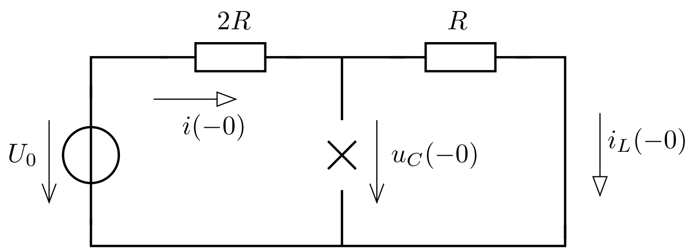
Az állandó U_0 gerjesztés megfelel az előző feladatban a $t \to \infty$ esetnek, ezért $i_a(t) = 10$ mA.
Az $u_{s,b}(t) = (1 - \varepsilon(t))(-U_0)$ az előző feladatbeli gerjesztés (-1)-szerese, ezért

$$i_b(t) = \left(-15 \cdot e^{-t/4} + 10 \cdot e^{-t/3{,}33} - 10\right) \text{mA}$$

A két megoldás összegeként adódik a teljes megoldás

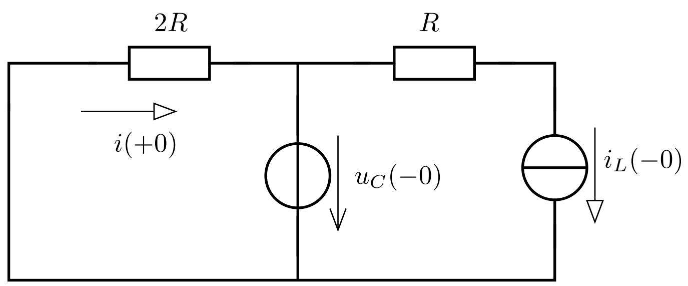
$$i(t) = \begin{cases} 10 & \text{ha } t < 0 \\ -15 \cdot e^{-t/4} + 10 \cdot e^{-t/3{,}33} & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg a hálózat alapján a válasz ugrását $t = 0$-ban!
A $t < 0$ esetén (azonos az előző feladatbeli $t \to \infty$ esettel)



$$i_L(-0) = \frac{U_0}{2R + R} = \frac{U_0}{3R} = 10 \text{ mA} \qquad u_C(-0) = \frac{R}{2R + R} U_0 = \frac{U_0}{3} = 20 \text{ V}; \quad i(-0) = i_L(\infty) = 10 \text{ mA}$$

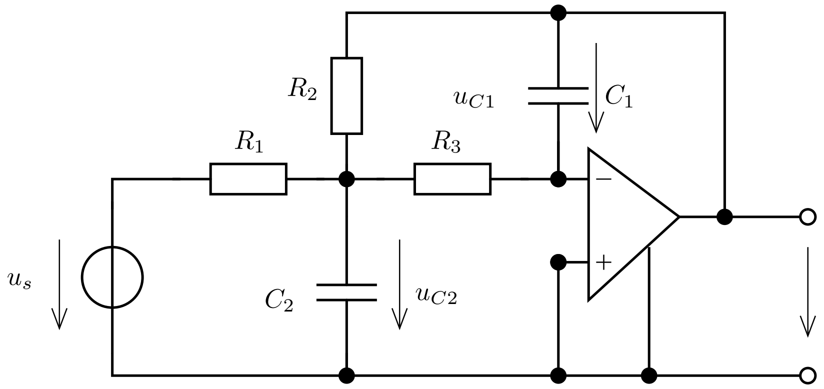
A $t = +0$-ban ennek megfelelően a tekercs helyett áramforrás, a kondenzátor helyett feszültségforrás jelenik meg :



$$i(+0) = -\frac{20}{2R} = -\frac{20}{4} = -5 \text{ mA}$$

$$\Delta i = i(+0) - i(-0) = -5 - 10 = -15 \text{ mA}$$

6. Határozzuk meg az állapotváltozós leírás normálalakját az alábbi hálózat esetében, ha a keresett válasz az u_2 feszültség, a gerjesztés a feszültségforrás feszültsége! Milyen esetben lesz stabil a rendszer? Adjuk meg a válasz időfüggvényét, ha $R-1 = 1\ k\Omega$, $R_2 = 2k\Omega$, $R_3 = 5k\Omega$, $C_1 = 1$ nF, $C_2 = 2$ nF, és a feszültségforrás feszültségének időfüggvénye $U_0 = 10\varepsilon(t)$ V!



Felhasználva, hogy az ideális műveleti erősítő két bemeneti pontja azonos potenciálú és nem folyik rajtuk áram, felírható

$$\left.\begin{aligned} C_2\frac{d}{dt}u_{C2} + \frac{u_{C2}}{R_3} + \frac{u_{C2}-u_{C1}}{R_2} + \frac{u_{C2}-u_s}{R_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt}u_{C1} &= -\frac{u_{C2}}{R_3} \\ u_2 &= u_{C1} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}u_{C1} = -\frac{1}{R_3C_1}u_{C2} \\ &\frac{d}{dt}u_{C2} = \frac{1}{R_2C_2}u_{C1} - \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{C_2}u_{C2} + \frac{1}{R_2C_2}u_s \\ &\quad u_2 = u_{C1} \end{aligned}}$$

A rendszermátrix elemeiből ($A_{11} = 0!$) adódik a karakterisztikus polinom :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -A_{12} \\ -A_{21} & \lambda - A_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 + (-A_{22})\lambda - A_{12}A_{21}$$

amely $R_i > 0$, $C_i > 0$ esetén Hurwotz-polinom, ezért a hálózat stabil $R_i, C_i > 0$ esetén!

A megadott paraméterértékeket behelyettesítve adódik az állapotváltozós leírás :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 \\ 0,25 & -0,85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} u_s$$

$$y = u_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{pmatrix} + 0 \cdot u_s$$

Sajátértékek és sajátvektorok :

$$\lambda_1 = -0,0636 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 0,9530 \\ 0,3030 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -0,7864 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} 0,2465 \\ 0,9691 \end{pmatrix}$$

A gerjesztett összetevö állandó, ezért

$$\begin{pmatrix} 0 & -0,2 \\ 0,25 & -0,85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_g = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Illesztés a $t = +0$-ban (a kezdetben energiamentesség miatt $\mathbf{x}(0) = 0$

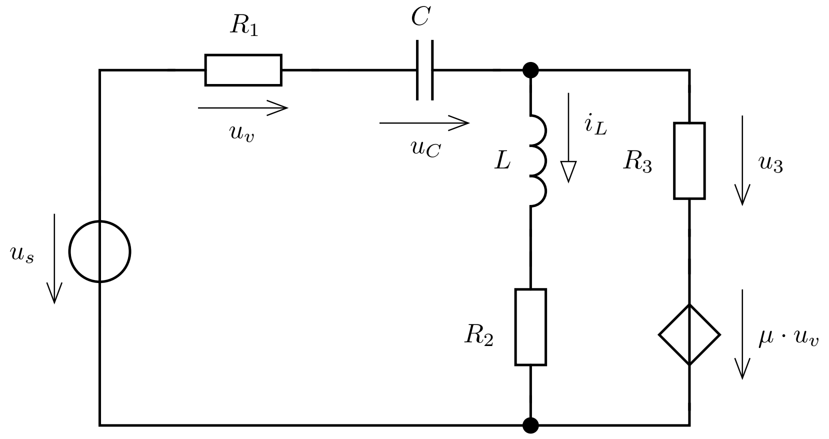
$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{x}_g \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0,9530 & 0,3030 \\ 0,2465 & 0,9691 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -20 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 22,832 \\ -7,137 \end{pmatrix}$$

Az állapotváltozó időfüggése (az előző eredményeinket Felhasználva)

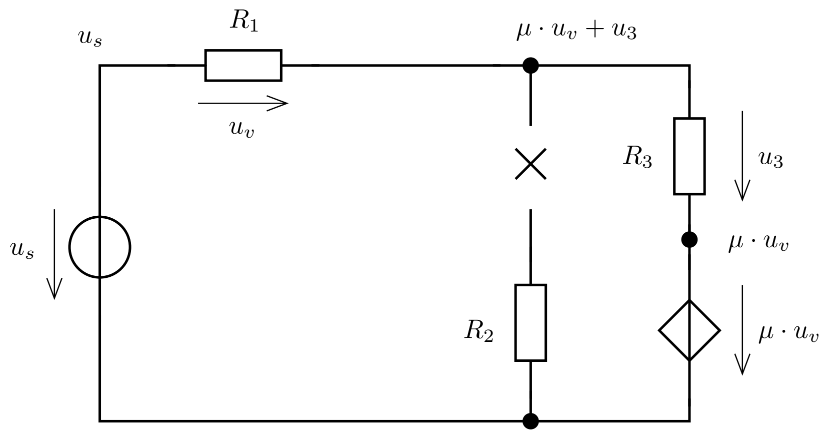
$$u_{C1}(t) = 22,832 \cdot 0,9530 \cdot e^{-0,0636\ t} - 7,137 \cdot 0,2465 \cdot e^{-0,7864 \cdot t} - 20$$
$$u_{C2}(t) = 22,832 \cdot 0,3030 \cdot e^{-0,0636\ t} - 7,137 \cdot 0,9691 \cdot e^{-0,7864 \cdot t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_{C1}(t) &= 21,76 \cdot e^{-0,0636\ t} - 1,76 \cdot e^{-0,7864 \cdot t} - 20 \\ u_{C2}(t) &= 6,92 \cdot e^{-0,0636\ t} - 6,965 \cdot e^{-0,7864 \cdot t} \\ u_2(t) &= 21,76 \cdot e^{-0,0636\ t} - 1,76 \cdot e^{-0,7864 \cdot t} - 20 \end{aligned}}$$

7. Számítsuk ki az u_3 feszültség ugrását, ha a feszültségforrást 0-ról U_0 feszültségre kapcsoljuk!



$t < 0$ esetén energiamentes a hálózat, ezért $u_C(0) = 0$ és $i_L(0) = 0$.
A $t = +0$ esetben a kondenzátort rövidzár, a tekercset szakadás helyettesíti



A felső csomópontra felírt egyenlet illetve a nagy hurokra felírt egyenlet (majd némi számolás után a keresett feszültség értékek)

$$\begin{aligned} u_3 + \mu u_v + u_v - U_0 &= 0 \\ \frac{u_3}{R_3} &= \frac{U_0 - \mu u_v}{R_1 + R_3} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} u_v &= \frac{U_0 - u_3}{1+\mu} \\ u_3 &= \frac{(1+2\mu)R_3}{(1+2\mu)R_3 + (1+\mu)R_1} U_0 \end{aligned}}$$

Megjegyzés : A hálózat $(1 + \mu) = 0$ esetén nem reguláris.