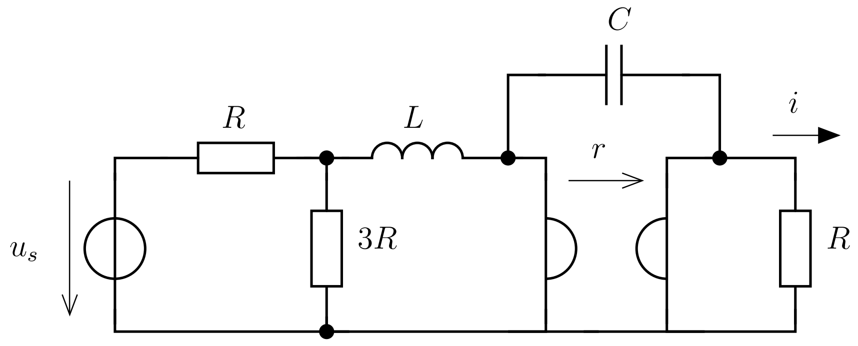
1. 1. feladat - Másodrendű hálózat válaszának számítása

1.1. Feladat

Határozzuk meg az alábbi hálózat esetében a válasz időfüggvényét, ha a gerjesztés $U_0 \cdot \varepsilon(t)$!



A hálózat paraméterei : ...

1.2. Megoldás

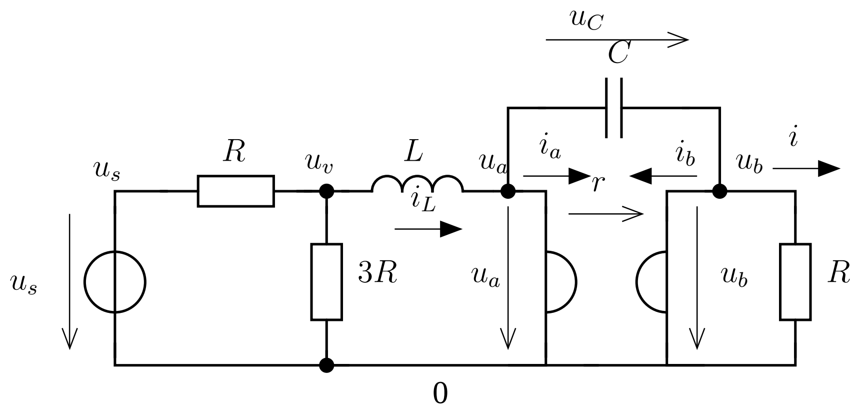
Az egynél magasabb rendű hálózatok esetében nem alkalmazható a medzsikformula. Ezért az állapotváltozós leírás megoldásának általános lépéseit alkalmazzuk :

1. állapotváltozós leírás normálalakjának meghatározása
2. sajátértékek és sajátvektorok kiszámítása
3. gerjesztett összetevő meghatározása próbafüggvény módszerrel
4. illesztés egy adott időpontra
5. behelyettesítés a válasz kifejezésébe

A hálózati paraméterek értékei az alábbiak : $R = 3k\Omega$, $C = 0{,}4\mu\text{F}$, $L = 2$ mH, $r = 2.5k\Omega$. Gerjesztés a feszültségforrás u_s feszültsége, válasz az i áram.

1.2.1. ÁVLNA meghatározása

Az állapotváltozós leírás normálalakjának meghatározásához vegyünk fel állapotváltozókat és a szükséges csomóponti potenciálokat!



Ezután felírhatóak a megfelelő számú egyenlet. Célunk annak meghatározása, hogy az ismeretlenek (u'_C, i'_L, i, u_a, u_b, i_a, i_b, u_v) hogyan függenek a forrásoktól (u_s, u_C, i_L). Ezért összesen 8 egyenletet kell felírnunk.

Az állapotváltozók a kondenzátor feszültsége (u_C) és a tekercs árama (i_L).

Adódnak a csomópontokra felírható csomóponti egyenletek :

$$i_a + C \cdot u'_C - i_L = 0 \tag{1}$$

$$i_b - C \cdot u'_C + \frac{u_b}{R} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{u_v}{3R} + \frac{u_v - u_s}{R} + i_L = 0 \tag{3}$$

továbbá a csatolt kétpóluspár karakterisztikája

$$u_a = -r \cdot i_b \tag{4}$$

$$u_b = r \cdot i_a \tag{5}$$

a hálózati összekapcsolási kényszerek

$$u_v - L \cdot i'_L - u_a = 0 \tag{6}$$

$$u_b + u_C = u_a \tag{7}$$

és a válasz kifejezése

$$i = \frac{u_b}{R} \tag{8}$$

Ezt megoldva (például Matlab alkalmazásával szimbolikusan) adódik :

$$\frac{d}{dt}u_C = -\frac{R}{Cr^2}u_C - \frac{-r^2 + Rr}{Cr^2}i_L \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}i_L = -\frac{R+r}{Lr}u_C - \frac{7R}{4L}i_L + \frac{3}{4L}u_s \tag{10}$$

$$i = \frac{1}{r}u_C + i_L \tag{11}$$

A hálózati paraméterek koherens egységrendszerben (kΩ, V, mA, mH, nF) történő behelyettesítésével a numerikus alak

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{11}{10} & -\frac{21}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} u_s \tag{12}$$

$$i = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + 0 \cdot u_s \tag{13}$$

1.2.2. Sajátérték, sajátvektor meghatározása

A numerikus értékek felhasználásával adódó ÁVLNA ((12) és (13)) alapján Matlab segítségével adódnak a keresett sajátvektorok és sajátértékek. (Ne feledjük, hogy a sajátvektorok hossza normalizált!)

$$\lambda_1 = -0{,}8841 \mu\text{s}^{-1}; \quad \underline{\mathbf{m}}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8454 \\ -0{,}5342 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2{,}9409 \mu\text{s}^{-1}; \quad \underline{\mathbf{m}}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}2760 \\ 0{,}9611 \end{pmatrix}$$

1.2.3. Gerjesztett összetevő

A gerjesztett összetevő a gerjesztésre hasonlít (mint az autó futása az útra), ezért ahhoz hasonló lesz a próbafüggvény is. Jelen esetben a gerjesztés állandó a $t > 0$ tartományon, ezért a próbafüggvények is állandó értékűek lesznek.

$$\underline{\mathbf{x}}_g = \begin{pmatrix} U_C \\ I_L \end{pmatrix}$$

Az ÁVLNA-ba visszahelyettesítjük a gerjesztett megoldást abban az időben, amikor a tranziens már lezajlott. Ekkor $\underline{\mathbf{x}} \approx \underline{\mathbf{x}}_g$, ezért

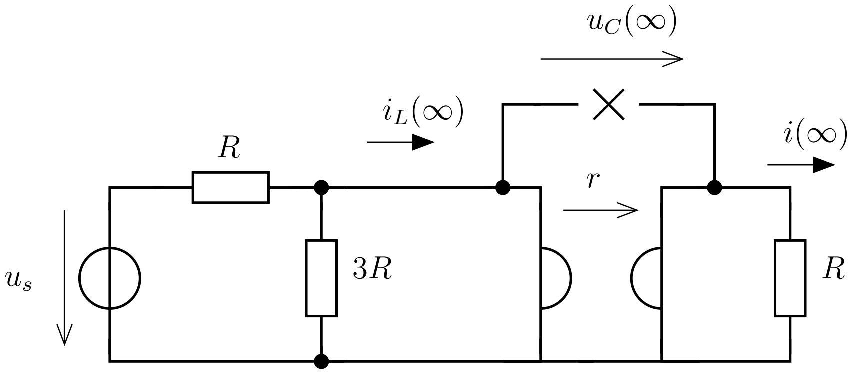
$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{x}}_g = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{B}} \cdot us \quad \Rightarrow \quad 0 = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\mathbf{x}}_g + \underline{\mathbf{B}} \cdot U_0$$

ami alapján (lineáris egyenletrendszer az állapotváltozók gerjesztett összetevőire)

$$\underline{\mathbf{x}}_g = \begin{pmatrix} U_C \\ I_L \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot U_0$$

$$\begin{pmatrix} U_C \\ I_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}7212 \\ 1{,}7308 \end{pmatrix}$$

Ennek értelmezése, hogy ezen értékeket veszi fel az egyes állapotváltozó végértékként! Ezért kiszámításuk közvetlenül a hálózatból is lehetséges.



1.2.4. Illesztés

A sok lehetséges megoldásból ki kell választani azt, amelyik jelen esetben megvalósul. Ezért a korábbi meggondolásoktól különbözően (pl. a hálózat alapján) megállapítjuk egy időpontban az állapotváltozók értékét, majd a teljes megoldást ebben az időpontban illesztjük (a még meglévő állandókat meghatározzuk).

A gerjesztés belépő, ezért $t < 0$ tartományon energiamentes a hálózat. Ezért az állapotváltozók értéke zérus lesz $t = 0$-ban, és a korlátos gerjesztés miatt az állapotváltozó nem is ugrik.

A teljes megoldás alakja :

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{m}}_1 \cdot k_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \underline{\mathbf{m}}_2 \cdot k_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \underline{\mathbf{x}}_g \tag{14}$$

Ennek a $t \to 0$ (egész pontosan $t \to 0+0$) határértékét véve, a k_1, k_2 ismeretlenekre lineáris egyenletrendszer adódik.

$$0 = \underline{\mathbf{m}}_1 \cdot k_1 + \underline{\mathbf{m}}_2 \cdot k_2 + \underline{\mathbf{x}}_g$$

$$\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{m}}_1 & \underline{\mathbf{m}}_2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} = -\underline{\mathbf{x}}_g \tag{15}$$

Ennek eredményeképpen :

$$\underline{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}2197\\-1{,}1229\end{pmatrix}$$

1.2.5. Behelyettesítés

Az együtthatók ismerete alapján az állapotváltozók és a válasz behelyettesítéssel adódnak.

$$x_1(t) = (\underline{\mathbf{m}}_1)_1 \cdot k_1 \exp(\lambda_1 t) + (\underline{\mathbf{m}}_2)_1 \cdot k_2 \cdot \exp(\lambda_2 t) + (\underline{\mathbf{x}}_g)_1$$
$$x_2(t) = (\underline{\mathbf{m}}_1)_2 \cdot k_1 \exp(\lambda_1 t) + (\underline{\mathbf{m}}_2)_2 \cdot k_2 \cdot \exp(\lambda_2 t) + (\underline{\mathbf{x}}_g)_2$$
$$y(t) = \underline{\mathbf{C}}_1^T x_1(t) + \underline{\mathbf{C}}_2^T x_2(t) + D \cdot u_s(t)$$

A megfelelő mennyiségek

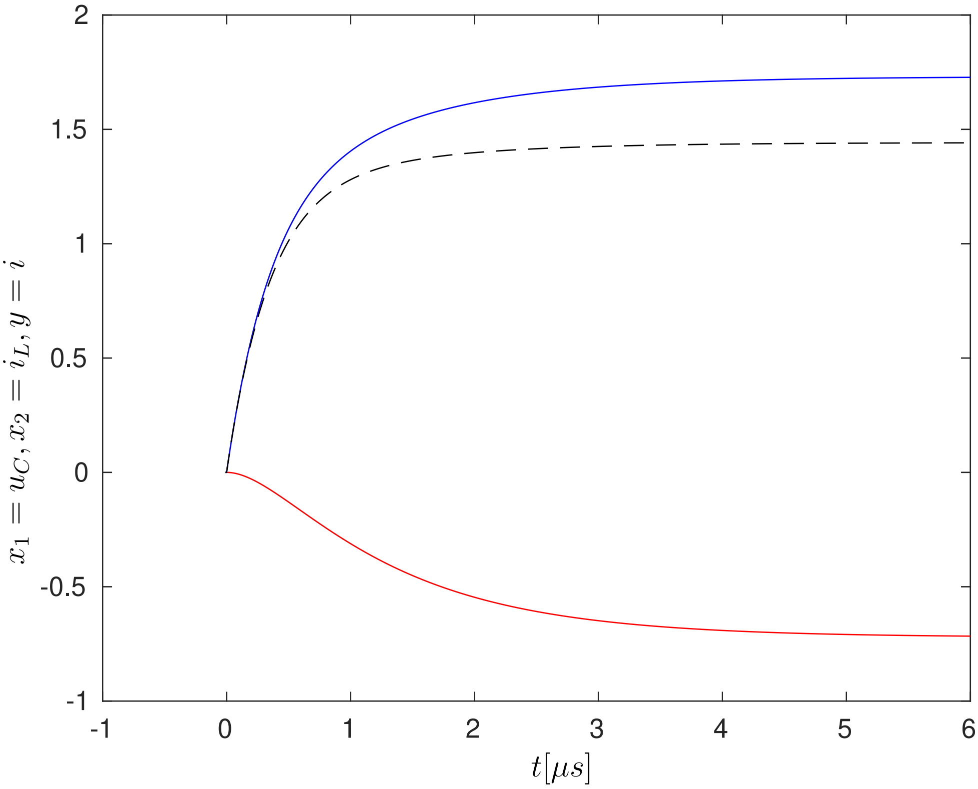
$$(\underline{\mathbf{m}}_1)_1 \cdot k_1 = 1{,}0311; (\underline{\mathbf{m}}_2)_1 \cdot k_2 = -0{,}3100$$

$$(\underline{\mathbf{m}}_1)_2 \cdot k_1 = -0{,}6515; (\underline{\mathbf{m}}_2)_2 \cdot k_2 = -1{,}0793$$
$$\underline{\mathbf{C}}_1^T \cdot (\underline{\mathbf{m}}_1)_1 \cdot k_1 = 0{,}4124; \underline{\mathbf{C}}_1^T \cdot (\underline{\mathbf{m}}_2)_1 \cdot k_2 = -0{,}1240$$
$$\underline{\mathbf{C}}_2^T \cdot (\underline{\mathbf{m}}_1)_2 \cdot k_1 = -0{,}6515; \underline{\mathbf{C}}_2^T \cdot (\underline{\mathbf{m}}_2)_2 \cdot k_2 = -1{,}0793$$

Az időfüggvény

$$u_C(t) = \varepsilon(t) \cdot (1{,}0311 \cdot \exp(-0{,}8841 \cdot t) - 0{,}31 \cdot \exp(-2{,}9409 \cdot t) - 0{,}7212)\,\mathrm{V}$$
$$i_L(t) = \varepsilon(t) \cdot (-0{,}6515 \cdot \exp(-0{,}8841 \cdot t) - 1{,}0793 \cdot \exp(-2{,}9409 \cdot t) + 1{,}7308)\,\mathrm{mA}$$
$$i(t) = \varepsilon(t) \cdot (-0.2391 \cdot \exp(-0{,}8841 \cdot t) - 1{,}2033 \cdot \exp(-2{,}9409 \cdot t) + 1{,}4423)\,\mathrm{mA}$$

1.2.6. Eredmények ábrákon



x_1 - piros, x_2 - kék, y - fekete

1.2.7. Matlab kód

A szimbolikus megoldáshoz a Symbolic toolbox szükséges.

Listing 1. Szimbolikus megoldás az ÁVLNA-hoz

```
syms R L C r us i il uc ua ub ia ib uv ucv ilv
eq1 = ua == -r*ib;
eq2 = ub == r*ia;
eq3 = uv/(3*R)+il+(uv-us)/R == 0;
eq4 = -C*ucv + ub/R+ib == 0;
eq5 = C*ucv + ia - il ==0 ;
eq6 = ub + uc -ua ==0;
eq7 = uv - ua -L*ilv ==0;
eq8 = i == ub/R;
sol = solve(eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7, eq8, ucv, ilv, i, ua, ia,
    ub, ib, uv);

pretty(collect(simplify(sol.ucv),[uc, il,us]))
pretty(collect(simplify(sol.ilv),[uc, il,us]))
pretty(collect(simplify(sol.i),[uc, il,us]))
```

A paraméterek behelyettesítése :

Listing 2. Numerikus együtthatók számítása

```
sol2.ucv = subs(sol.ucv,{R,L,C,r},{3, 2, 0.4, 2.5})
pretty(collect(simplify(sol2.ucv),[uc, il,us]))
sol2.ilv = subs(sol.ilv,{R,L,C,r},{3, 2, 0.4, 2.5})
sol2.i = subs(sol.i,{R,L,C,r},{3, 2, 0.4, 2.5})
pretty(collect(simplify(sol2.i),[uc, il,us]))
pretty(collect(simplify(sol2.ilv),[uc, il,us]))
```

Numerikus megoldás keresése :

Listing 3. Paraméterek

```
A = [-6/5 -1/2;-11/10 -21/8];
B = [0;3/8];
CT = [2/5 1];
D = 0;
U0=10;
```

Listing 4. Együtthatók számítása

```
[m,la] = eig(A)
xg = A \ (-B*U0)
kk = m \ (-xg)

-1./la
t = -0.01:0.001:3;

k1 =kk(1);
k2 = kk(2);
la1 = la(1,1); la2 = la(2,2);
```

Az eddigiek alapján a válasz időfüggésének kiszámítása és ábrázolása:

Listing 5. Időfüggvények számítása

```
t = -0.01:0.001:6;
x1 = stepfun(t,0).*(m(1,1)*k1*exp(la1*t) + m(1,2)*k2*exp(la2*t) + xg(1));
x2 = stepfun(t,0).*(m(2,1)*k1*exp(la1*t) + m(2,2)*k2*exp(la2*t) + xg(2));
y1 = CT*[x1;x2] + D*U0*stepfun(t,0);
figure; plot(t,x1,'r-', t,x2,'b-', t,y1,'k--');
xlabel('t');
ylabel('x1,x2,y');
```