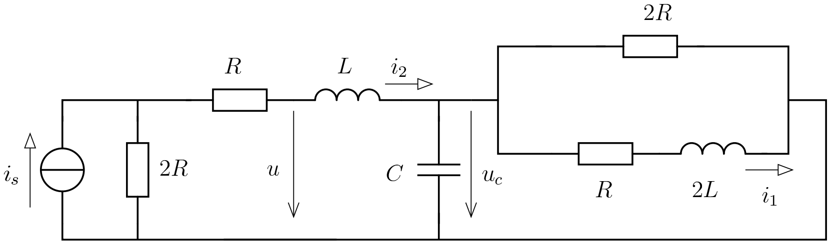
3 állapotváltozós rendszer vizsgálata

Reichardt András

April 9, 2014

Feladat meghatározása

Az alábbi hálózatra számítsuk ki az állapotváltozós leírás normálalakját és számítsuk ki a válasz időfüggvényét az adott gerjesztésre!



$$R = 5k\Omega,\ C = 0,4nF,\ L = 0,8mH,\ I_0 = 5\ mA,$$

$$i_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ I_0 & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

Megoldó módszer

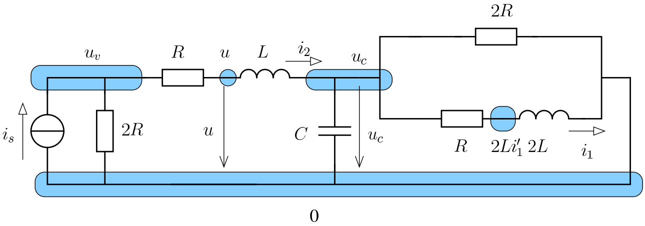
Alkalmazzuk a Híres-Nevezetes Ötlépéses Módszer-t (HNÖM)

1. Állapotváltozós leírás meghatározása
2. Sajátértékek, sajátválaszok számítása
3. Gerjesztett összetevő meghatározása
4. Kezdeti értékek érvényesítése
5. Válasz számítása

Opcionálisan még egy lépés, a post-processzálás követi ezen lépéseket. (Ábrázolás, analitikus alak meghatározása, további mennyiségek számítása.)

1. Állapotváltozós leírás meghatározása

Vegyük fel az ábrának megfelelően a csomóponti potenciálokat. Az állapotváltozók u_c, i_1, i_2 a feladatnak megfelelően választottak.



$$
\left.\begin{aligned}
Cu_c' + i_1 + \frac{u_c}{2R} - i_2 &= 0 \\
\frac{2Li_1' - u_c}{R} + i_1 &= 0 \\
u &= u_c + Li_2' \\
-i_s + \frac{u_v}{2R} + \frac{u_v - u}{R} &= 0 \\
i_2 + \frac{u - u_v}{R} &= 0
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\left.\begin{aligned}
Cu_c' &= -\frac{1}{2R}u_c - i_1 + i_2 \\
2Li_1' &= u_c - Ri_1 \\
Li_2' - u &= -u_c \\
u - u_v &= -i_2 R \\
u &= u_c + Li_2'
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \mathbf{w} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{u}
$$

1. Állapotváltozós leírás meghatározása

Az együtthatómátrixok

$$\begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\cdot L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_c' \\ i_1' \\ i_2' \\ u \\ u_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\ R} & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -R & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_c \\ i_1 \\ i_1 \\ i_s \end{pmatrix}$$

Matlab :

```
P = [C 0 0 0 0;0 2*L 0 0 0;0 0 L -1 0;0 0 0 1 -1;0 0 0 -2 3];
Q = [-1/(2*R) -1 1 0;1 -R 0 0;-1 0 0 0;0 0 -R 0;0 0 0 2*R];
PQ = = inv(P)*Q;
A = PQ(1:3,1:3); B = PQ(1:3,4); CT = PQ(4,1:3); D = PQ(4,4);
```

2. lépés – Sajátérték, sajátvektor

MATLAB : `[m,la] = eig(A)`
Miért? A tranziens megoldás $e^{\lambda\ t}$ alakú függvények súlyozott összege. Általánosan (n állapotváltozó esetében)

$$\mathbf{x}_{tr} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{m}_i e^{\lambda_i t}$$

ahol λ_i és $\mathbf{m}_i$ az $\mathbf{A}$ i-dik sajátértéke és sajátvektora.
A k_i együtthatókat majd a 4. lépésben határozzuk meg, egy adott pillanatbeli állapot ismeretében.
Jelen esetben, amikor 3 állapotváltozó van, a tranziens megoldás

$$\mathbf{x}_{tr} = k_1 \mathbf{m}_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \mathbf{m}_2 e^{\lambda_2 t} + k_3 \mathbf{m}_3 e^{\lambda_3 t}$$

A visszakapott eredmény alapján :

$$\lambda_1 = -18.580; \lambda_2 = -1.272; \lambda_3 = -2,272;$$

$$\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} -0.1344 \\ 0.0054 \\ 0.9909 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} -0.9454 \\ -0.3189 \\ 0.0676 \end{pmatrix} \quad \mathbf{m}_3 = \begin{pmatrix} 0.8050 \\ 0.5902 \\ -0.0611 \end{pmatrix}$$

3. lépés – Gerjesztett összetevő

MATLAB : `xg = A \(-B*I0);`
Miért? A gerjesztett összetevő hasonló a gerjesztéshez, ezért próbafüggvény segítségével oldjuk meg. Felveszünk minden állapotváltozóra egy gerjesztéshez hasonló függvényt, amelyben megfelelő számú ismeretlen állandó szerepel. Ezt a gerjesztett választ behelyettesítjük az állapotváltozós leírás egyenletébe, feltételezve hogy a tranziens már nincsen. (Ezért próbafüggvény.)
Hogyan válasszuk meg a próbafüggvényt? A gerjesztés ebben az esetben állandó a $t > 0$ tartományon. Ezért a választandó függvény is állandó kell legyen.

$$\mathbf{X}_g = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

Ezt visszahelyettesítve $\mathbf{x}_g' = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x}_g + \mathbf{B} \cdot u$. Felhasználjuk, hogy az állandó függvény deriváltja zérus.

$$0 = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} + \mathbf{B} \cdot I_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x}_g = -\mathbf{B} \cdot I_0}$$

4. lépés – Kezdeti értékek érvényesítése

MATLAB : `kk = m\(-xg);`
Miért ? A diff. egyenlet megoldásaként eddig kapott függvényekből a k_i állandókat nem ismerjük. (Görbesereget kaptunk eddig, amely mind kielégítik az állapotváltozós leírást, ha visszahelyettesítjük.) Egy pontot meg kell adni, amely megadja a görbék közül melyik a jelen esetben megfelelő. Ezért pl. a $t = 0$ pillanatban kiszámítjuk az állapotváltozók értékét, és összevetjük az általunk feltételezett válasszal, a kapott egyenletekből a keresett, eddig ismeretlen állandók megkaphatóak.
Kihasználjuk, hogy a gerjesztés korlátos, ezért az állapotváltozók folytonos függvények. Mivel $t < 0$ tartományon energiamentes volt a hálózat, ezért $\mathbf{x}(t < 0) = 0$. Ezért $x(0) = 0$. A megoldás feltételezett alakjába $t \to 0$ határértéket keressük. (Ekkor az exponenciális függvények értéke 1 lesz!)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_t r + \mathbf{x}_g = k_1\mathbf{m}_1 e^{\lambda_1 t} + k_2\mathbf{m}_2 e^{\lambda_2 t} + k_3\mathbf{m}_3 e^{\lambda_3 t} + \mathbf{x}_g$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{m}_1 k_1 + \mathbf{m}_2 \cdot k_2 + \mathbf{m}_3 \cdot k_3 + \mathbf{x}_g$$

Bevezetve $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{\mathbf{m}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 & \mathbf{m}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix}$

Innen

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{m}}} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{x}_g}$$

5. lépés – Válasz meghatározása

- Az állapotváltozók időfüggvénye ismert. (Minden állandó adott belőle.) Ezért már mindent ki lehet számítani.
- Pl. a 2. állapotváltozó időfüggvénye analitikusan (zárt alakban) a $t > 0$ tartományon

$$x_2(t) = k_1 \cdot m_{1,2} \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + k_2 \cdot m_{2,2} \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + k_3 \cdot m_{32} \cdot \exp(\lambda_3 \cdot t) + Q_2$$

  A számértékeket felhasználva

$$x_2(t) = -0.0186 \cdot e^{-18.580 \cdot t} - 4.4334 \cdot e^{-1.272 \cdot t} + 2.6339 \cdot e^{-2.272 \cdot t} + 1.8182$$

- A válasz ami igazán minket érdekel (figyelembe vesszük, hogy $t < 0$ esetén 0)

$$y(t) = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{x} + D \cdot u =$$
$$= (\mathbf{C}^T \mathbf{m}_1 \cdot k_1) \cdot e^{\lambda_1 t} + (\mathbf{C}^T \mathbf{m}_2 \cdot k_2) \cdot e^{\lambda_2 t} + (\mathbf{C}^T \mathbf{m}_3 \cdot k_3) \cdot e^{\lambda_3 t} + (\mathbf{C}^T \mathbf{x}_g + D \cdot I_0)$$

$$y(t) = \varepsilon(t) \left(50.9216 \cdot e^{-18.580 \cdot t} - 14.1 \cdot e^{-1.272 \cdot t} + 4.0881 \cdot e^{-2.272 \cdot t} + 9.0909\right)$$

5. lépés – Válasz meghatározása (másképpen)

- Az ábrázolás szempontjából a válasz kiszámítása egyes időpillanatokban célszerű (az időpillanatokat kis távolságba felvéve az ábrázolás közel-folytonos lesz).
  Ezért először létrehozunk egy idővektort : `t = -0.1:0.0001:2.5;`
  Kiszámítjuk az állapotvektorokat a korábbiak alapján.
```
x1 = stepfun(t,0).*(xtr1(1).*exp(la1*t)+xtr2(1)*exp(la2*t)+xtr3(1)*exp(la3*t))+stepfun(t,0).*xg(1);
x2 = stepfun(t,0).*(xtr1(2).*exp(la1*t)+xtr2(2)*exp(la2*t)+xtr3(2)*exp(la3*t))+stepfun(t,0).*xg(2);
x3 = stepfun(t,0).*(xtr1(3).*exp(la1*t)+xtr2(3)*exp(la2*t)+xtr3(3)*exp(la3*t))+stepfun(t,0).*xg(3);
```
- A választ innen $y = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{x} + D \cdot u$ alapján (a gerjesztés : $i_s(t) = I_0 \cdot \varepsilon(t)$ alapján)
```
y = CT*[x1;x2;x3]+stepfun(t,0).*D*I0;
```

Eredmények

Állapotváltozók időfüggvénye. (A fekete, szaggatott vonal az állandósult állapotbeli értéket jelöli.)

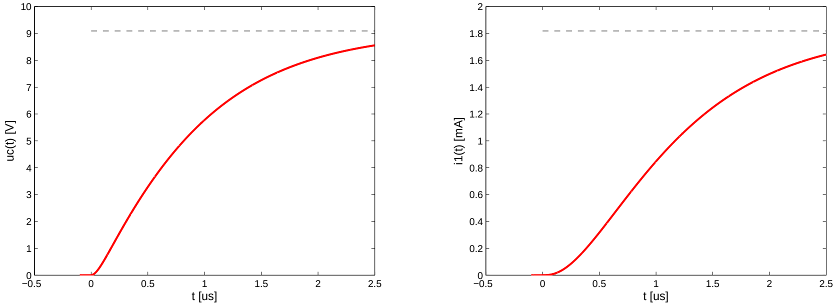


Figure: $x_1(t)$ (balra) és $x_2(t)$ (jobbra)

Eredmények (folyt.)

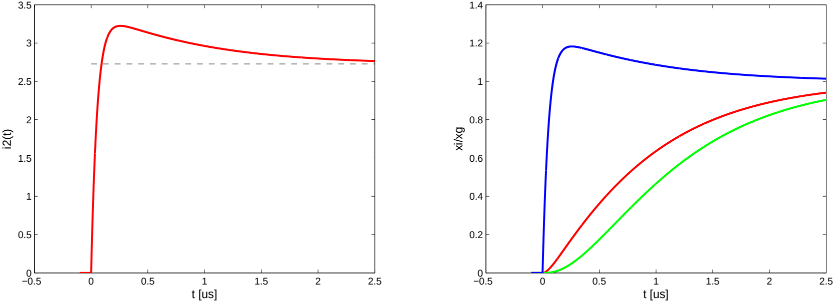


Figure: $x_4(t)$ (balra) illetve az 0sszes állapotváltozó egyszerre ábrázolva az állandósult állapotbeli értékükkel normalizálva (osztva), az időbeli viselkedésüket összehasonlíthatóvá téve. (piros – x_1, zöld – x_2, kék – x_3)

Eredmények (folyt. 2.)

Végül a válasz időfüggvénye :

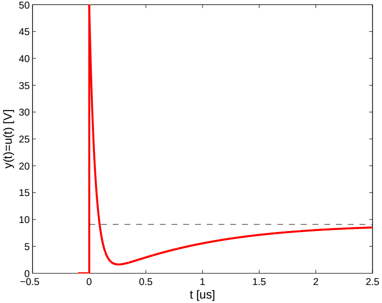


Figure: Válasz időfüggvénye. Szaggatott fekete az állandósult értéket jelöli.

Matlab kód

Listing 1: Elso resz

```
% 1. Allapotvaltozos leiras meghatarozasa
% Koherens egysegrendszert alkalmazva
R = 5;
C = 0.4;
L = 0.8;
I0 = 5;
% Ismeretlenek meghatarozasa
P = [C 0 0 0 0;0 2*L 0 0 0;0 0 L -1 0;0 0 0 1 -1;0 0 0 -2 3];
Q = [-1/(2*R) -1 1 0;1 -R 0 0;-1 0 0 0;0 0 -R 0;0 0 0 2*R];
% Egyutthatok szamitasa
PQ = inv(P)*Q
% Allapotvaltozos leiras normal alakjanak egyutthatoi
A = PQ(1:3,1:3);
B = PQ(1:3,4);
CT = PQ(4,1:3);
D = PQ(4,4);
% 2. Sajatertekek, sajatvektorok kiszamitasa
[m,la] = eig(A);
m1 = m(:,1); m2=m(:,2); m3 = m(:,3);
```

Matlab kód (folyt.)

Listing 2: Kod folytatas

```
% 3. Gerjesztett osszetevo szamitasa
xg = A\(-B*I0);
% 4. Kezdeti ertekek ervenyesitese
kk = m\(-xg);
% 5. Valasz meghatarozasa (az idofuggvenyek osszeallitasa)
k1 = kk(1); k2 = kk(2); k3=kk(3);
% tranziens osszetevo egyutthatoi
xtr1 = k1*m1; xtr2 = k2*m2; xtr3 = k3*m3;
% sajatertekek
la1=la(1,1); la2=la(2,2); la3=la(3,3);
t = -0.1:0.0001:2.5;
% Allapotvaltozok ertekeinek szamitasa az idovektorban adott pillanatok
x1 = stepfun(t,0).*(xtr1(1).*exp(la1*t)+xtr2(1)*exp(la2*t)+...
xtr3(1)*exp(la3*t))+stepfun(t,0).*xg(1);
x2 = stepfun(t,0).*(xtr1(2).*exp(la1*t)+xtr2(2)*exp(la2*t)+...
xtr3(2)*exp(la3*t))+stepfun(t,0).*xg(2);
x3 = stepfun(t,0).*(xtr1(3).*exp(la1*t)+xtr2(3)*exp(la2*t)+...
xtr3(3)*exp(la3*t))+stepfun(t,0).*xg(3);
% Valaszfuggveny ertekeinek meghatarozasa az idovektorban adott
% pillanatokban
y = CT*[x1;x2;x3]+stepfun(t,0).*D*I0;
```