1. Gondolatok a megoldandó feladatról

Az állapotváltozós leírás megoldása során összetevőkre bontást alkalmazzuk, amely egy eléggé általános megoldási módja az állandó együtthatójú közönséges differenciál egyenleteknek. A módszer alapgondolata, hogy a teljes megoldás a homogén egyenlet megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként állítható elő.

Az általunk felírt

$$\dot{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \mathbf{x}$$

differenciál egyenlet esetén homogén egyenletnek nevezzük a

$$\dot{\mathbf{x}} - \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x} = 0$$

egyenletet. Ennek megoldása az $\mathbf{x}_h$ módon jelölt homogén megoldás. Ennek alakja $\mathbf{x}_h = \mathbf{K} \cdot e^{\lambda t}$, amelyet a homogén egyenletbe helyettesítve, kapjuk az alábbi ún. sajátérték egyenletet.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{m} = \lambda \cdot \mathbf{m}$$

Ennek megoldásai a λ_i sajátértékek és a hozzájuk tartozó $\mathbf{m}_i$ sajátvektorok. Ezek ismeretében a homogén egyenlet általános megoldásának alakja

$$\mathbf{x}_h = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{m}_i e^{\lambda_i \cdot t} = k_1 \mathbf{m}_1 \; e^{\lambda_1 t} + k_2 \mathbf{m}_2 \; e^{\lambda_2 t} + \ldots + k_n \mathbf{m}_n \; e^{\lambda_n t}$$

Vegyük észre, hogy a homogén egyenlet megoldása független a gerjesztéstől. A gerjesztés hatása csak a kezdeti feltételek ($t = 0$ pillanatbeli érték) érvényesítésekor szól csak bele a homogén megoldása. (Azaz a megoldás alakját nem változtatja meg a gerjesztés jellege, csak a benne szereplő konstansok értékét változtatja meg.) Ezáltal elmondható, hogy a homogén megoldást a rendszer sajátjának tekinthetjük és ezáltal a saját válasz, vagy szabad válasz elnevezés is helytálló. Szokásos még tranziens összetevőnek nevezni, mivel például két különböző konstans értékű gerjesztés esetén az átkapcsolás után tapasztalható tranzienseket a homogén megoldás jelenti.

Az inhomogén egyenlet megoldását nevezzük inhomogén megoldásnak, vagy gerjesztett összetevőnek, esetleg stacioner válasznak. A megoldás alakja nagyban hasonlít a gerjesztő jelre, azaz a gerjesztéssel azonos alakú lesz. Sokféle módszer létezik meghatározására, azonban csak a próbafüggvényes megoldást alkalmazzuk. [1]

A megoldás utolsó lépése a kezdeti feltételek érvényesítése. Ekkor a homogén egyenlet megoldásában szereplő ismeretlen konstansokat kell meghatározni, amelyet egy adott időpontban ismert $\mathbf{x}$ érték alapján tudjuk megtenni. Lényegében a korábban meghatározott végtelenül nagyszámú függvényseregből ekkor választjuk ki az adott problémának megfelelőt.

[1] A differenciálegyenletek esetében, ha találtunk egy megoldást, akkor mindegy milyen módon találtuk azt meg, elegendő az hogy az egyenletbe behelyettesítve, kielégítse azt. Lásd a differenciál egyenletek egzisztencia és unicitási tételét!

1.0.1. Megoldás lépései

[**0. lépés**] A differenciálegyenlet megoldásának nulladik lépése magának a differenciálegyenletnek a meghatározása. Ez a megadott hálózati reprezentáció alapján hurok ill. csomóponti egyenletek felírásával és az ismeretlen állapotváltozók idő szerinti deriváltjára történő megoldásával történik. [2]

[**1. lépés**] Homogén egyenlet megoldása.

A sajátérték egyenlet megoldásával a sajátértékeket és a hozzájuk tartozó sajátvektorok kiszámítjuk. A k_i konstansokat majd később határozzuk meg.

[**2. lépés**] Inhomogén egyenlet megoldása próbafüggvénnyel.

A gerjesztéshez hasonló próbafüggvényt veszünk, amelyben ismeretlen konstansok szerepelnek. Ezen konstansok értékét az inhomogén egyenletbe behelyettesített próbafüggvény alapján kapjuk meg. (Ekkor tulajdonképpen egy lineáris egyenletrendszer adódik a próbafüggvényekben szereplő konstansokra.)

[**3. lépés**] Kezdeti feltételek érvényesítése

A kezdeti feltételeket a hálózat előélete alapján tudjuk meghatározni. Ekkor általában a $t = +0$ pillanatbeli értéket számítjuk ki. A korábbi lépések eredményeképpen már a homogén megoldás konstansain kívűl mindent tudunk. Ekkor

$$\mathbf{x}(+0) = \lim_{t \to +0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}|_{t=0}$$

összefüggésből adódó, k_i-re vonatkozó lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

Mivel $\lim_{t\to 0} \exp(\lambda_i t) = 1$ ezért

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{m}_i + \mathbf{x}_{ih} = \mathbf{x}(+0)$$

azaz a lineáris egyenletrendszer

$$(\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \ldots \mathbf{m}_n)\, \mathbf{k} = \mathbf{x}(+0) - \mathbf{x}_{ih}$$

[**4. lépés**] Válasz kifejezése az állapotváltozók és a gerjesztés ismeretében.

A választ leíró egyenlet alapján az állapotváltozók meghatározott és a gerjesztés adott alakját kell behelyettesítéssel kiszámítani.

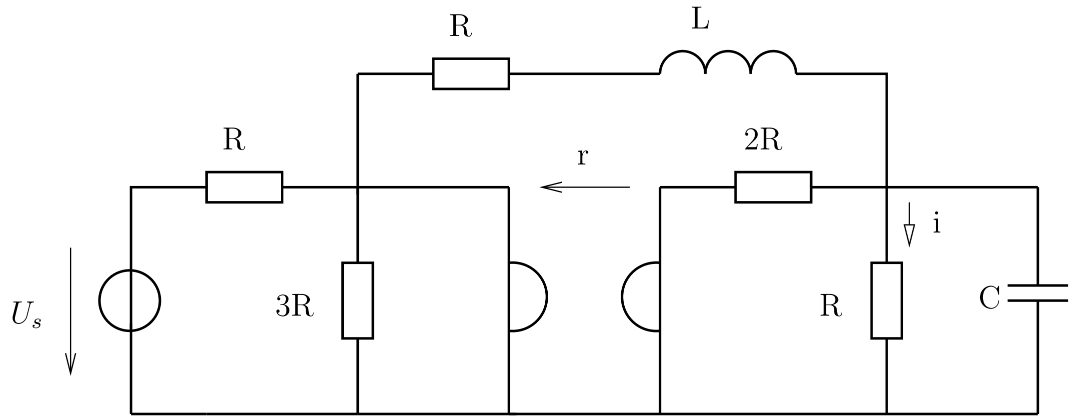
[2] Ez úgy értendő, hogy a kapott egyenletrendszer megoldásaként a kondenzátorok feszültségének illetve a tekercsek áramának időszerinti deriváltjára vonatkozó összefüggéseket kell kapnunk, amelyekben szerepelnek a gerjesztések (áramforrás(ok) árama, feszültségforrás(ok) feszültsége) és az állapotváltozók. Semmi más!

2. Példafeladat másodrendű hálózatra

2.1. Feladat megfogalmazása

Tekintsük az alábbi hálózatot! Gerjesztés a feszültségforrás feszültsége, a válasz a bejölt i áram. Határozzuk meg a válasz kifejezését az alábbi gerjesztések esetében!

1. $u_s(t) = U_0 \cdot \varepsilon(t)$ - konstans gerjesztés
2. $u_s(t) = \frac{U_0}{2}\delta(t)$ - zérus gerjesztés
3. $u_s(t) = U_1 \cdot \cos(\omega_0 t)$ - szinuszos gerjesztés
4. $u_s(t) = U_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$ - exponenciális gerjesztés (rezonanciával illetve anélkül)



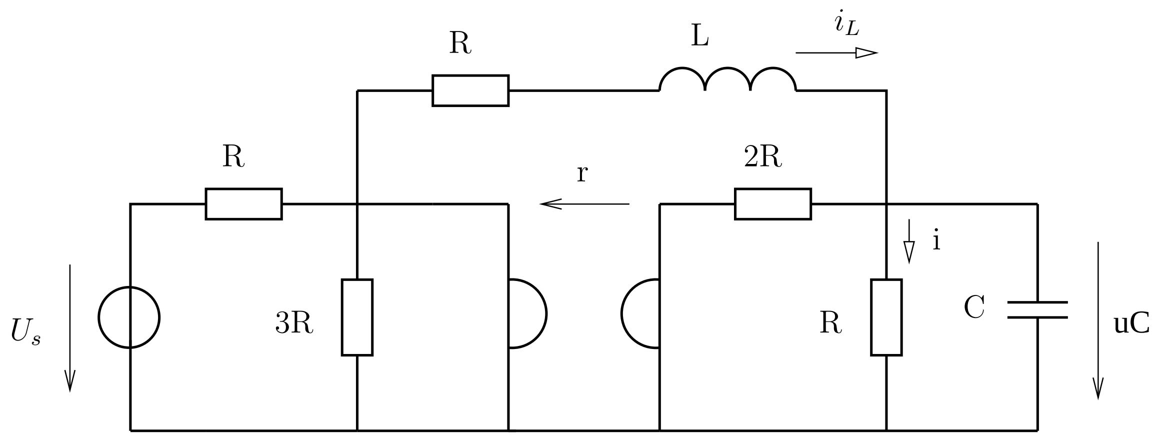
A hálózat paraméterei az alábbiak.
$R = 2k\Omega$, $r = 1k\Omega$, $L = 10$ mH, $C = 2,4$ nF, $\omega_0 = 3$ Mrad/s, $U_0 = 5,7$ V, $U_1 = 3,75$ V

2.2. Megoldás

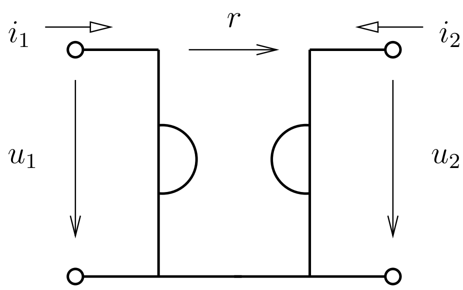
2.2.1. Egyenletek előállítása

Határozzuk meg először az állapotváltozós leírás normál alakját! A behelyettesítés folyamán alkalmazzuk az alábbi koherens mértékegység rendszert : V, mA, kΩ, nF, mH, μs, Mrad/s.

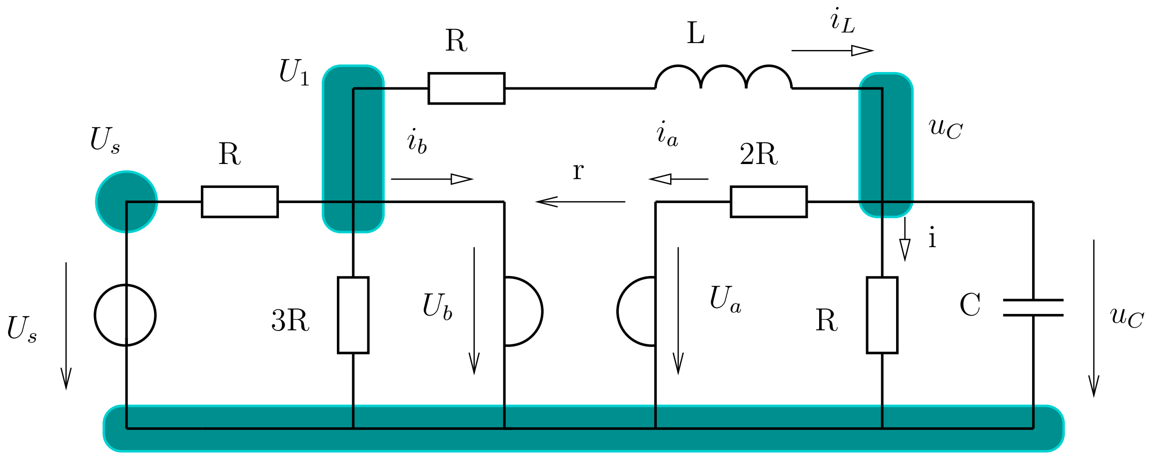
Vegyük fel az állapotváltozókat, amelyek a tekercs árama és a kondenzátor feszültsége az alábbi ábrának megfelelő referenciairányokkal.



A girátor esetében a nyílnak megfelelően primer oldali (”a” indexű oldal) és szekunder oldali (”b” indexesek) változókat behelyettesítve.



Ezek felhasználásával a csomóponti potenciálok és a keresett mennyiségeket az alábbi ábra mutatja.



Ismeretlenjeink : U_a, $U_1 = U_b$, i_a, i_b, u'_c, i'_L. [3]

Egyenleteink : a girátor karakterisztikája (2 db), csomóponti egyenletek az U_1, U_C és U_a csomópontokra (3 db), valamint egy hurok egyenlet (1 db). [4]

$$U_a = -r \cdot i_b \tag{1}$$

$$U_1 = r \cdot i_a \tag{2}$$

$$\frac{U_1}{3R} + \frac{U_1 - U_s}{R} + i_L + i_b = 0 \tag{3}$$

$$C\ u'_C + \frac{u_C}{R} + i_a - i_L = 0 \tag{4}$$

$$i_a + \frac{U_a - u_C}{2R} = 0 \tag{5}$$

[3] Az állapotváltozókat a felírás szempontjából a gerjesztéssel egyenértékűnek vesszük, és a deriváltakat tekintjük ismeretlennek. Az így adódó egyenletrendszer megoldása – a többi ismeretlen kiküszöbölésével – tulajdonképpen a deriváltak meghatározására szolgál.

[4] A kondenzátor feszültségének deriváltjára vonatkozó egyenlet csak csomóponti egyenletből adható, míg tekercs áramának deriváltjára vonatkozó egyenlet csak hurokegyenletből adható.

$$U_1 - R \cdot i_L - L \cdot i_L' - u_C = 0 \tag{6}$$

Az (4) alapján

$$u_C' = \frac{1}{C} i_L - \frac{1}{C} i_a - \frac{u_C}{RC} \tag{7}$$

míg (6) alapján

$$i_L' = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} u_C + \frac{1}{L} U_1 \tag{8}$$

$$(1) \to i_b = -\frac{U_a}{r} \text{ és } (2) \to i_a = \frac{U_1}{r}$$

$$(6) \to U_a = u_C - 2R \cdot i_a = u_C - 2R \cdot \frac{U_1}{r}$$

$$(3) \to \left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{R}\right) U_1 - \frac{1}{R} U_s + i_L - \frac{U_a}{r} = 0 \to \ldots U_1 = \frac{3Rr^2}{r(4r^2+6R^2)}\, u_C - \frac{3Rr^2}{4r^2+6R^2}\, i_L + \frac{3r^2}{4r^2+6R^2} U_s$$

Innen

$$u_C' = u_C \left(-\frac{1}{RC} - \frac{1}{C} \cdot \frac{3R}{4r^2+6R^2}\right) + \left(\frac{1}{C} \cdot \frac{3Rr}{4r^2+6R^2} + \frac{1}{C}\right)\, i_L - \frac{1}{C} \cdot \frac{3r}{4r^2+6R^2}\, U_s =$$
$$= \underbrace{-\frac{1}{RC} \cdot \frac{9R^2+4r^2}{4r^2+6R^2}}_{A_{1,1}}\, u_C + \underbrace{\frac{1}{C}\, \frac{4r^2+6R^2+3Rr}{4r^2+6R^2}}_{A_{1,2}}\, i_L - \frac{1}{C} \cdot \frac{3r}{4r^2+6R^2} u_s$$

$$i_L' = \frac{1}{L} \cdot \frac{3Rr^2}{4r^2+6R^2} \cdot \left(\frac{u_C}{r} - i_L + \frac{U_s}{R}\right) - \frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} u_C =$$
$$= \underbrace{\frac{3Rr - 4r^2 - 6R^2}{4r^2+6R^2}}_{A_{2,1}}\, u_C \underbrace{-\frac{R}{L}\, \frac{7r^2+6R^2}{4r^2+6R^2}}_{A_{2,2}}\, i_L + \frac{3r^2}{L(4r^2+6R^2)} \cdot u_s$$

Fejezzük ki mátrixos alakban az állapotegyenletet, felhasználva hogy

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{d\,t} \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} \cdot \frac{9R^2+4r^2}{4r^2+6R^2} & \frac{1}{C}\ \frac{4r^2+6R^2+3Rr}{4r^2+6R^2} \\ \frac{3Rr-4r^2-6R^2}{4r^2+6R^2} & -\frac{R}{L}\ \frac{7r^2+6R^2}{4r^2+6R^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{C} \cdot \frac{3r}{4r^2+6R^2} \\ \frac{3r^2}{L(4r^2+6R^2)} \end{pmatrix} u_s$$

$$y = i = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + 0 \cdot u_s$$

Behelyettesítve :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -0,2976 & 0,5060 \\ -0,0786 & -0,1107 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,0446 \\ 0,0107 \end{pmatrix} \cdot u_s$$

$$y = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + 0 \cdot u_s$$

2.2.2. Kezdeti feltételek meghatározása

a. A hálózat $t < 0$ esetén nonenergikus, ezért a kezdeti feltételként az állapotváltozóknak zérus értéket kell felvenniük. Mivel a gerjesztés a továbbiakban korlátos, ezért az állapotváltozók értéke sem ugrik időben.

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(+0) = 0 \tag{9}$$

b. A hálózat ebben az esetben is nonenergikusként indul, azonban nem-korlátos gerjesztés éri. Ezért a $t \to +0$ esetén

$$\mathbf{x}(+0) = \frac{U_0}{2}\,\mathbf{B} \tag{10}$$

c. Nonenergikus hálózat, korlátos gerjesztéssel, ezért

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(+0) = 0 \tag{11}$$

d. Nonenergikus hálózat, korlátos gerjesztéssel, ezért

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(+0) = 0 \tag{12}$$

2.2.3. Homogén megoldás

Feladatunk a sajátvektorok és sajátértékek meghatározása, amelyet MATLAB segítségével ([m,la] = eig(A)) megoldunk. EKkor

$$\lambda_1 = -0,2042 + 0,1761 \cdot j; \quad \mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 0,9304 \\ 0,1718 + 0,3239 \cdot j \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -0,2042 - 0,1761 \cdot j; \quad \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} 0,9304 \\ 0,1718 - 0,3239 \cdot j \end{pmatrix}$$

A homogén megoldás alajka

$$\mathbf{x}_h = k_1 \cdot \mathbf{m}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + k_2 \cdot \mathbf{m}_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

2.2.4. Inhomogén megoldás

a. A gerjesztés konstans $t > 0$ esetén, ezért a próbafüggvény szintén konstans. Ne feledjük el, hogy az ismeretlen vektor mindkét eleme egy-egy ismeretlen, ezért két különböző konstans lesz a próbafüggvény.

$$\mathbf{x}_{ih} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

ahol X_1 =konst. és X_2 =konst.

Mivel konstans deriváltja zérus, ezért $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet (a tranziensek után tetszőleges időpontban)

$$0 = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot U_0$$

Innen az adódó lineáris egyenletrendszer megoldásával az inhomogén megoldás :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x}_{ih} = -\underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot U_0 \qquad \to \qquad \mathbf{x}_{ih} = \begin{pmatrix} 0,0375 \\ 0,5250 \end{pmatrix}$$

b. A Dirac-delta gerjesztés esetén a gerjesztés azonosan zérus a vizsgált időtartományban, ezért az inhomogén megoldás is zérus.
c. Szinuszos gerjesztés esetén a próbafüggvény általános szinuszos függvény kell legyen.

$$\mathbf{x}_{ih} = \mathbf{x}_C \cdot \cos(\omega_0 t) + \mathbf{x}_S \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Ennek deriváltja már bonyolultabb lesz.

$$\mathbf{x}' = -\omega_0 \cdot \mathbf{x}_C \cdot \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \cdot \mathbf{x}_S \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe :

$$-\omega_0 \cdot \mathbf{x}_C \cdot \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \cdot \mathbf{x}_S \cdot \cos(\omega_0 t) = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot (\mathbf{x}_C \cdot \cos(\omega_0 t) + \mathbf{x}_S \cdot \sin(\omega_0 t)) + \mathbf{B}U_1 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

A $\cos(\omega_0 t)$ és $\sin(\omega_0 t)$ függvények ortogonalitása miatt az egyes együtthatóknak meg kell egyeznie a bal és jobb oldalon, ami lineáris egyenletrendszerre vezet.

$$\cos: \ \omega_0 \cdot \mathbf{x}_S = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x}_C + U_1 \cdot \mathbf{B}$$
$$\sin: \ -\omega_0 \cdot \mathbf{x}_C = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{x}_S$$

Innen a $\mathbf{x}_C$-ből és $\mathbf{x}_S$-ből képezett ismeretlenvektorra vonatkozó egyenlet :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & -\omega_0 \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \\ \omega \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} & \underline{\underline{\mathbf{A}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{x}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \cdot \mathbf{B} \\ 0 \end{pmatrix}$$

A megoldást a MATLAB-val számolva :

$$\mathbf{x}_C = \begin{pmatrix} -0,0499 \\ -0,0062 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_S = \begin{pmatrix} -0,1442 \\ 0,0407 \end{pmatrix}$$

Az inhomogén megoldás

$$\mathbf{x}_{ih} = \begin{pmatrix} -0,0499 \cdot \cos(\omega_0 t) - 0,1442 \cdot \sin(\omega_0 t) \\ -0,0062 \cdot \cos(\omega_0 t) + 0,0407 \cdot \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

Némileg átalakítva

$$\mathbf{x}_{ih} = \begin{pmatrix} 0,0499 \cdot \cos(\omega_0 t + \pi) + 0,1442 \cdot \sin(\omega_0 t + \pi) \\ 0,0062 \cdot \cos(\omega_0 t + \pi) + 0,0407 \cdot \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

d. Exponenciális gerjesztés esetén a próbafüggvény is exponenciális kell legyen.

2.2.5. Kezdeti feltételek érvényesítése

a .

$$\mathbf{x}(+0) = 0 = k_1 \cdot \mathbf{m}_1 \, e^{\lambda_1 \, t} + k_2 \cdot \mathbf{m}_2 \, e^{\lambda_2 \, t} + \mathbf{x}_{ih} = \mathbf{m}_1 \cdot k_1 + \mathbf{m}_2 \cdot k_2 + \mathbf{x}_{ih}$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{x}_{ih}$$
$$k_1 = -0,0202 + j \cdot 0,7998; \qquad k_2 = -0,0202 - j \cdot 0,7998$$

b.

$$\mathbf{x}(+0) = \frac{U_0}{2} \cdot \mathbf{B} = \underline{\underline{\mathbf{m}}} \cdot \mathbf{k}$$

$$k_1 = -0.0684 - 0.0670 \cdot j = 0.0957 \cdot e^{-j\ 2{,}36}$$

$$k_2 = -0.0684 + 0.0670 \cdot j = 0.0957 \cdot e^{j\ 2{,}36}$$

c.

$$\mathbf{x}(0) = 0 = \underline{\underline{\mathbf{m}}} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{X}_C \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{m}}} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{X}_C$$

$$k_1 = 0.0268 + 0.0001 \cdot j = 0.0268 \cdot e^{j\ 0{,}0045}$$

$$k_2 = 0.0268 - 0.0001 \cdot j = 0.0268 \cdot e^{-j\ 0{,}0045}$$

d.

2.2.6. Teljes megoldás analitikus alakban

A korábbi pontok alapján ismerünk minden együtthatót, a teljes megoldás analitikus felírásához.
a. Ismerjük az inhomogén megoldást

$$\mathbf{x}_{ih} = \begin{pmatrix} 0,0375 \\ 0,5250 \end{pmatrix}$$

és a $\mathbf{k}$ és $\underline{\underline{\mathbf{m}}}$ szorzatából adódó együttható mátrixot is.

$$\underline{\underline{\mathbf{m}}} \cdot \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0,6928\ e^{j1{,}600} & 0,6928\ e^{-j1{,}600} \\ 0,2730\ e^{j2{,}846} & 0,2730\ e^{-j2{,}846} \end{pmatrix}$$

Ennek ismeretében ki tudjuk fejezni az egyes állapotváltozók időfüggvényét. Ez abban az esetben, ha a sajátértékek nem komplex értékűek, könnyen végrehajtható. Azonban komplex sajátérték esetén egy átalakítást (komplextelenítést) kell végrehajtani. Általános esetben :

$$x_1 = k_1 \cdot m_{11} \cdot \exp(\lambda_1\ t) + k_2 \cdot m_{21} \cdot \exp(\lambda_2\ t) + x_{ih,1}$$

ahol $P_1 = k_1 \cdot m_{11}$ és $P_2 = k_2 \cdot m_{21}$ valamint $P_1^\star = P_2$, azaz $P_1 = P\ e^{j\psi}$ és $P_2 = P\ e^{-j\psi}$ egymás komplex konjugáltja, valamint $\lambda_1 = \alpha + j\beta$ és $\lambda_2 = \alpha - j\beta$.

Ekkor az első állapotváltozó homogén megoldási része

$$x_{1,h} = P_1 e^{\lambda_1 t} + P_2 e^{\lambda_2 t} = P\ e^{j\psi} \cdot e^{\alpha\ t} e^{j\beta t} + P\ e^{-j\psi} \cdot e^{\alpha\ t} e^{-j\beta t} = 2P \cdot e^{\alpha t} \cos(\beta t + \psi)$$

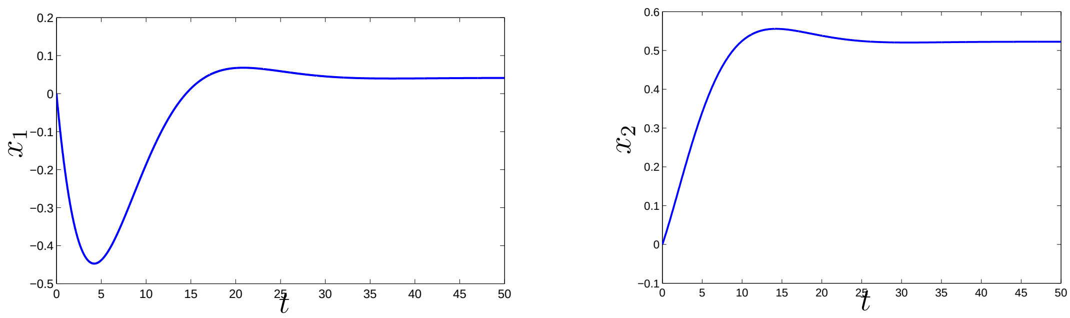
Ezek figyelembe vételével

$$x_1(t) = 2 \cdot 0,6928 \cdot e^{-0{,}2042\ t} \cos(0,1761\ t + 1,600) + 0,0375$$

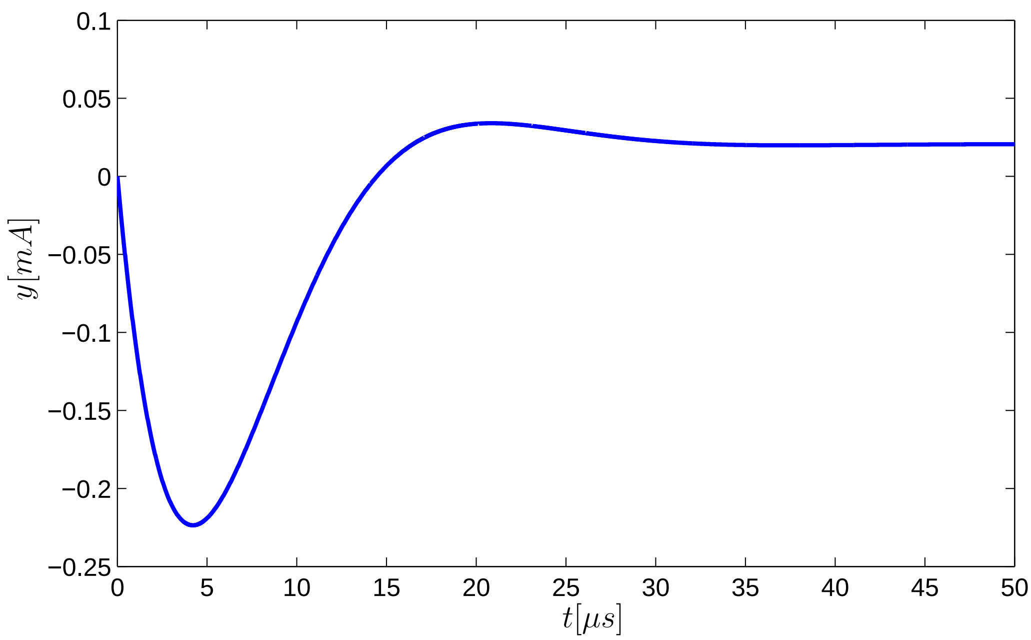
$$x_2(t) = 2 \cdot 0,2730 \cdot e^{-0{,}2042\ t} \cos(0,1761\ t + 2,846) + 0,5250$$

$$y(t) = 0,5 \cdot x_1(t) = 0,6928 \cdot e^{-0{,}2042\ t} \cos(0,1761\ t + 1,600) + 0,01875$$

A kapott időfüggvények láthatóak az alábbi ábrákon.



1. ábra. Állapotváltozók alakulása az időtartományban

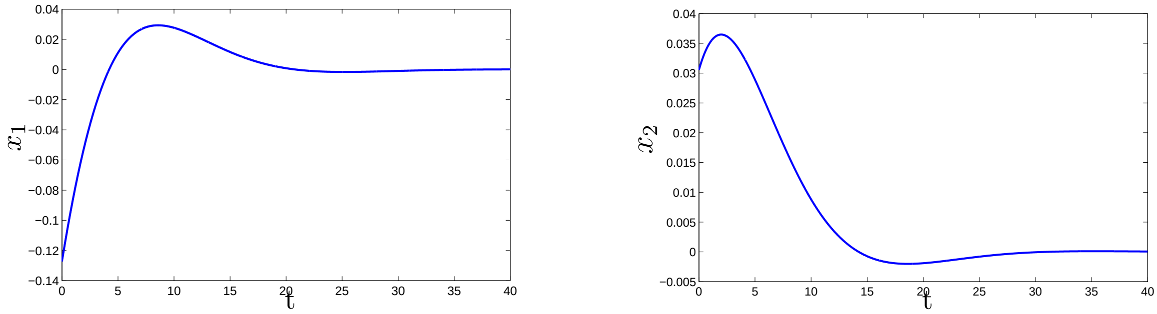


2. ábra. Válasz kifejezése $u_s(t) = U_0\varepsilon(t)$ gerjesztés esetén.

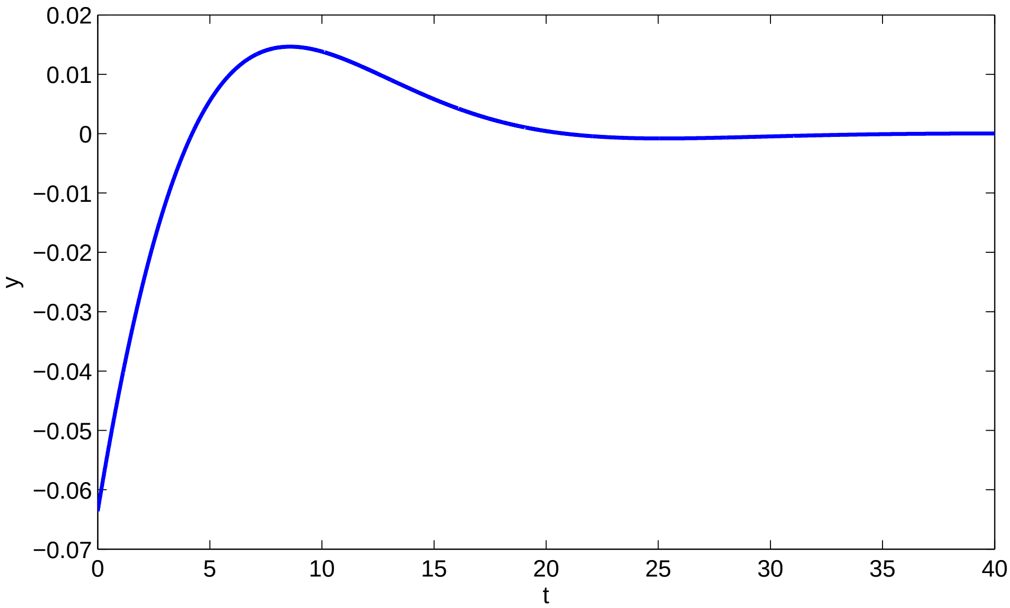
b. Hasonlóan tehetjük meg ekkor is az analitikus alakot, csak most az inhomogén megoldás zérus. A megfelelő együtthatók a MATLAB-os script alapján megtalálható.[5]

$$\underline{\underline{\mathbf{m}}}\cdot\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -0.0636 - 0.0623\cdot j & -0.0636 + 0.0623\cdot j \\ 0.0153 - 0.0316\cdot j & 0.0153 + 0.0316\cdot j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0891\ \exp(-j\ 2,36) & 0,0891\ \exp(j\ 2,36) \\ 0,0351\ \exp(-j\ 1,12) & 0,0351\ \exp(j\ 1,12) \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = 2\cdot 0,0891\cdot e^{-0,2042\ t}\cos(0,1761\ t - 2,36)$$
$$x_2(t) = 2\cdot 0,0351\cdot e^{-0,2042\ t}\cos(0,1761\ t - 1,12)$$
$$y(t) = 0,5\cdot x_1(t) = 0,0891\cdot e^{-0,2042\ t}\cos(0,1761\ t - 2,36)$$



3. ábra. Állapotváltozók $\frac{U_0}{2}\delta(t)$ gerjesztés esetén



4. ábra. Válasz az $u_s(t) = \frac{U_0}{2}\delta(t)$ gerjesztés esetén

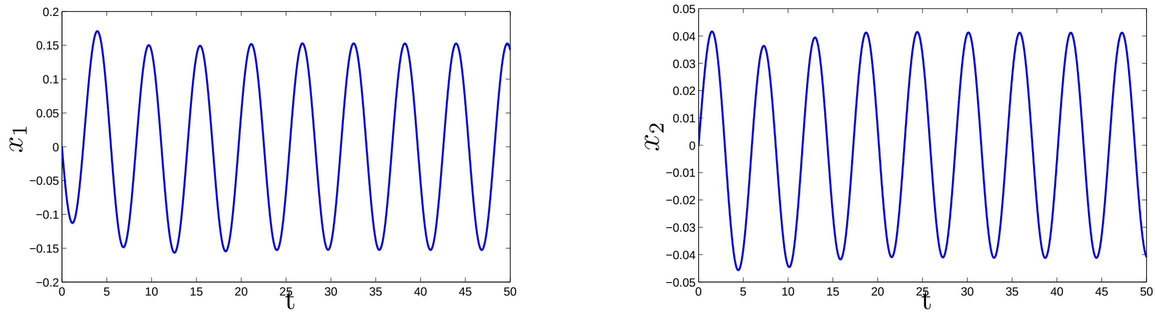
[5] A numerikus ábrázolásos résznél létrehozott `km` változót kell megvizsgálni. `abs(km)` parancssal az abszolút értékeket, `angle(km)` parancssal a fázisszögeket radiánban kapjuk meg. Ha fokban szeretnénk a fázist megkapni, akkor `180/pi*angle(km)` segítségével tudjuk ezt elérni.

c. A helyzetet csak a valamivel bonyolultabb inhomogén megoldás bonyolítja.

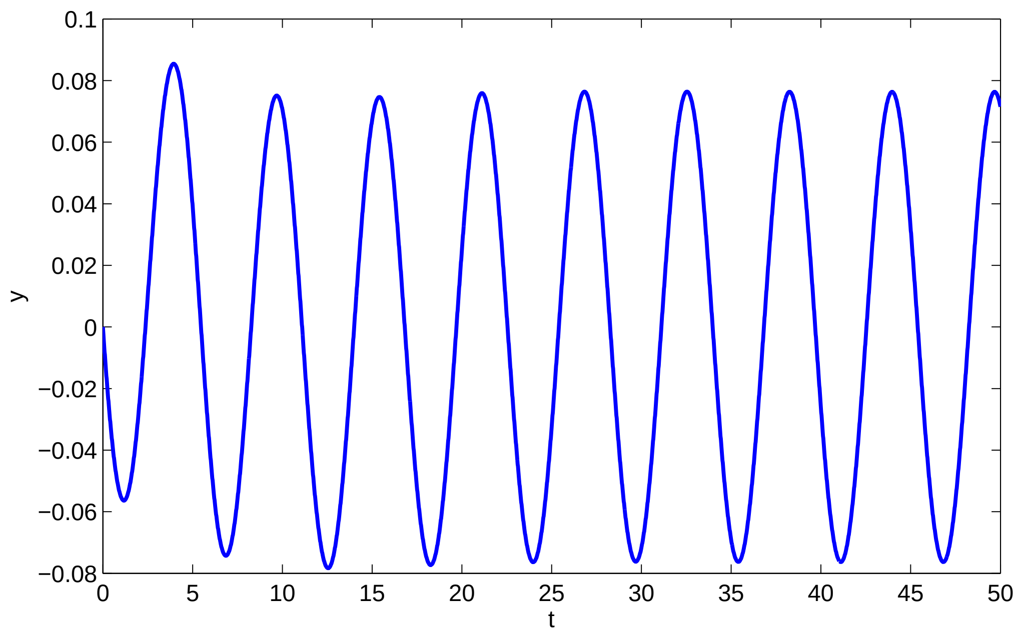
$$x_1(t) = 2 \cdot 0,025 \cdot e^{-0,2042\ t} \cos(0,1761\ t + 0,0045) + 0,0499 \cos(\omega_0 t + \pi) + 0,1442 \sin(\omega_0 t + \pi)$$

$$x_2(t) = 2 \cdot 0,0098 \cdot e^{-0,2042\ t} \cos(0,1761\ t + 1,25) + 0,0062 \cos(\omega_0 t + \pi) + 0,0407 \sin(\omega_0 t)$$

$$y(t) = 0,025 \cdot e^{-0,2042\ t} \cos(0,1761\ t + 0,0045) + 0,0499 \cos(\omega_0 t + \pi) + 0,1442 \sin(\omega_0 t + \pi)$$



5. ábra. Állapotváltozók $U_1 \cos(\omega_0 t)$ gerjesztés esetén



6. ábra. Válasz az $u_s(t) = U_1 \cos(\omega_0 t)$ gerjesztés esetén

3. Megoldás MATLAB segítségével

A megoldást elvégző szkriptek felépítése azonos. A megoldás során figyelembe kell venni, hogy a MATLAB csak kisegít a bonyolult matematikai számításokban. Segítségével könnyű megoldani lineáris egyenletrendszereket, kiszámítani függvények értékét sok pontban majd pedig ábrázolni. Mindössze csak annyit kell nekünk megtenni, hogy megmondjuk mit tegyen a program.

Most csak a szinuszos gerjesztés esetét megoldó file-t elemzem. A többi teljesen hasonlóan működik, változtatásával tetszőleges probléma megoldható.

Először a file fejléce irja le a file-ra vonatkozó információkat. Majd a hálózat paramétereit adjuk meg a kiválasztott mértékrendszerben.

```
% 3. Feladat
% Allapotvaltozos leiras megoldasa, belepo szinuszos gerjesztes eseten

% Halozati parameterek megadasa
R=2; r=1; C=2.4; L=10; U0=5.7; U1= 3.75; om0=1.1;
```

Az állapotváltozós leírás megoldásának első lépése az állapotváltozós leírás normál alakjának megadása, amelyet a következő részben teszünk meg.

```
% Allapotvaltozos leiras matrixainak megadasa
dd = 6*R^2+4*r^2;
A =[(-9*R^2+4*r^2)/(R*C*(dd)) (dd+3*R*r)/(C*dd);(3*R*r-dd)/(L*dd) -(7*r^2+6*R^2)/(L*d
B = [(-3*r)/(C*dd);3*r^2/(L*dd)]
C = [1/R 0];
D=0;
```

A homogén megoldás során a sajátértékeket és a hozzá tartozó sajátvektorokat számítjuk. (Ne feledjük, hogy a konstansokat csak az inhomogén megoldás kiszámítása után tudjuk meghatározni a kezdeti feltételekből.)

```
% sajatertekek es sajatvektorok
[m, la] = eig(A)
```

Az inhomogén egyenlet megoldása során a felírt egyenletet oldjuk meg. (Ez az első lépés, amely különbözik az egyes problémáknál.) A megoldandó egyenlet az inhomogén egyenletbe behelyettesített próbafüggvény alapján adódik az ismeretlenekre.

```
% inhomogen megoldas meghatarozasa
M = [ A -om0*eye(2,2);om0*eye(2,2) A];
N = [-U1*B;0;0];
XCXS = M \ N;
```

Az így kapott egyenlet megoldásvektorából a cos és sin együtthatókat ki kell nyerni.

```
XC = XCXS(1:2)
XS = XCXS(3:4)
```

A homogén megoldás eddig ismeretlen együtthatóit a kezdeti feltételek alapján határozzuk meg.

```
% Kezdeti feltetelek ervenyesitese
kk = m \ (-XC)
```

A kapott k_1 és k_2 alapján a teljes megoldás megadható.

```
% Teljes megoldas numerikus kiszamitasa
k1 = kk(1); k2 = kk(2);
m1 = m(:,1); m2 = m(:,2);
km = [k1*m1 k2*m2];
la1 = [1 0]*la*[1 0]'; % la1 = la(1,1);
la2 = [0 1]*la*[0 1]';% la2 = la(2,2);
```

Az ábrázoláshoz szükséges az ábrázolandó időpontokat megadni, majd ezen idópontokban az állapotváltozók és a megoldás értékét kell kiszámítani.

```
% idovektor definialasa
t=0:0.01:50;
% allapotvaltozo vektor letrehozasa ...
x = zeros(2,length(t));
% ... megoldasa
x(1,:) = km(1,1)*exp(la1.*t)+km(1,2)*exp(la2.*t)+ ...
  XC(1)*cos(om0.*t)+XS(1)*sin(om0.*t);
x(2,:) = km(2,1)*exp(la1.*t)+km(2,2)*exp(la2.*t)+ ...
  XC(2)*cos(om0.*t)+XS(2)*sin(om0.*t);
y = C * x + D * U1 * cos(om0.*t).* stepfun(t,0);
```

Most már minden időpillanatban ismert az állapotváltozók és a megoldás értéke. Ezeket már ábrázolni.

```
% 1. allapotvaltozo abrazolasa
figure;
plot(t,real(x(1,:)),'b-');
xlabel('t');
ylabel('x1');

% 2. allapotvaltozo abrazolasa
figure;
plot(t,real(x(2,:)),'b-');
xlabel('t');
ylabel('x2');

% Valasz abrazolasa
figure;
plot(t,real(y),'b-');
xlabel('t');
ylabel('y');
```

Az xlabel és ylabel segítségével tetszőleges szöveget lehet elhelyezni. (Az én szövegem a leírásba való behelyezés miatt ilyen egyszerű.)

4. Megoldás beépített MATLAB függvénnyel

A numerikus analízis egyik feladata, hogy adott differenciálegyenlet rendszer, mint az általunk vizsgált állapotváltozós leírás is, esetén tetszőleges gerjesztés esetén megadjuk az ismeretlenek időfüggvényét. A mostani probléma megoldások során a numerikus megoldás keresése alapvető fontosságú.

A MATLAB tartalmaz előre megírt rutint kezdeti érték probléma megoldására. Ebben a fejezetben ezt fogjuk alkalmazni. Felhasználása egyszerű, azonban megfelelő kezelhetősége érdekében tudni kell a mögötte húzódó elméletet is.

Alapvetően az `ode45` függvény alkalmazzuk. Azonban ki kell egészítenünk még néhány file-val.

Az ode45 első paramétere a differenciál egyenletet megadó függvényre mutató pointer. Ez a függvény egy külön file-ban kell található legyen, amelynek a neve megegyezik a függvény nevével.

A megoldandó probléma legyen a korábban megoldott állapotegyenlet és némileg módosított válasz kifejezéssel.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.2381 & 0.5060\\-0.0786 & -0.1107\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0.0446\\0.0107\end{pmatrix}$$

$$y(t)=\begin{pmatrix}0.75 & 2.75\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+0.5\cdot u_s$$

Most létrehozzuk a differenciál egyenletet megadó file-t, és a gerjesztés leíró gerj.m file-t.

`allapot.m`

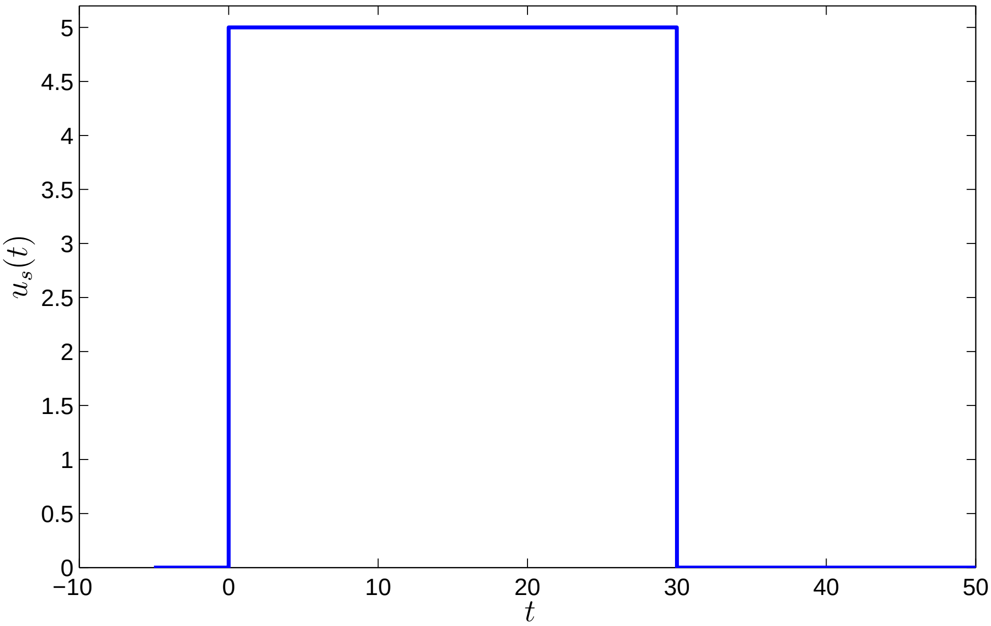
```
function dy = allapot(t,y);
dy = zeros(2,1);

dy(1) = -0.2381 * y(1) + 0.5060 * y(2) - 0.0446 * gerj(t);
dy(2) = -0.0786 * y(1) - 0.1107 * y(2) + 0.0107 * gerj(t);
```

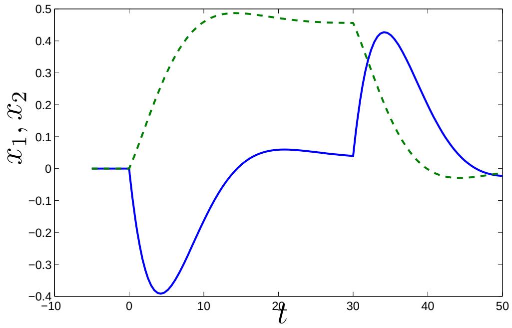
Ez a file végzi a teljes számítást, meghívva a megoldót és az állapotváltozók alapján a választ kiszámítja, majd ábrázolja azt. `szamitas.m`

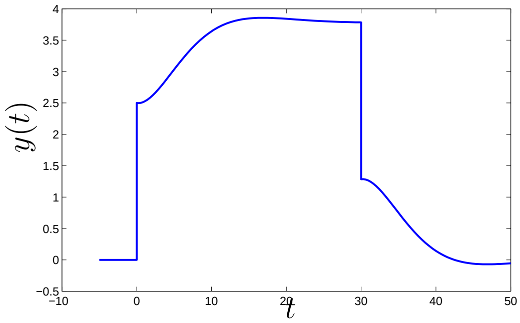
```
% szamitas.m
options = odeset('RelTol',1e-4);
[T,X] = ode45(@allapot, [-10 50],[0 0],options);
Y = zeros(length(T),1);
for i=1:length(T)
    Y(i) = 0.75*X(i,1) + 2.75*X(i,2) + 0.5 *gerj(T(i));
end;
```

Először néhány opciót beállítunk, majd a megoldó rutint meghívjuk, amely az állapotváltozókat szolgáltatja a megfelelő időpillanatokkal együtt. Ebből számítjuk ki a választ az összefüggésnek megfelelően minden időpillanatba.



7. ábra. Gerjesztés





A teljes időtartományt az ode45 függvény második paraméterében lehet megadni $[t_{min}$ ␣ $t_{max}]$ módon.

A gerjesztést a gerj.m file-ban tudjuk leírni.

a. példa

Tekintsük azt az esetet, amikor a gerjesztés $U_0 \cdot (\varepsilon(t) - \varepsilon(t-30))$. Az ekkor kapott időfüggvények az alábbi láthatjuk. Vegyük észre, hogy a válasz értéke ugrik amikor a gerjesztés ugrik. Azonban az állapotváltozók nem ugranak, mint azt vártuk.