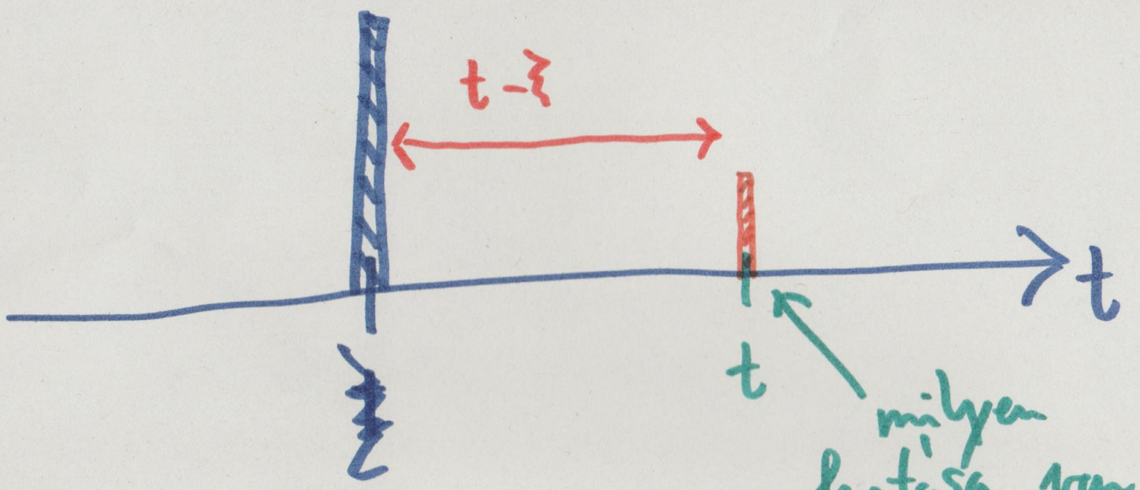
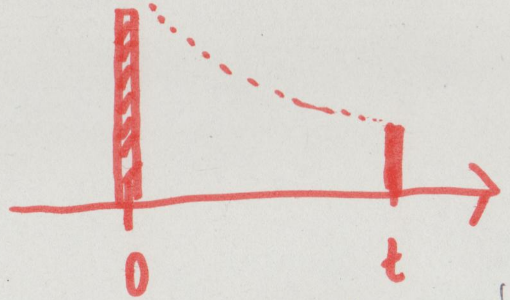
Konvolúció – értelmezése

gerjesztő impulzus



$$\underbrace{u(\xi)\Delta\xi}_{\text{impulzus súlya (területe)}} \longrightarrow \underbrace{h(t-\xi)\cdot u(\xi)\Delta\xi}_{\text{a rendszer válasza } t\text{-ben } (t-\xi \text{ idővel később})}$$

Impulzusválasz

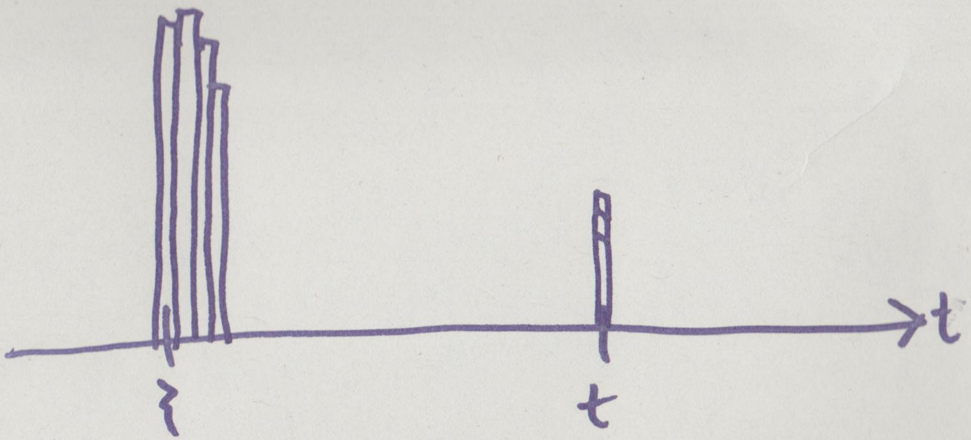


0 pillanatban lévő egységnyi (1 területű) impulzus hatására t-ben milyen válasz adódik?

$\rightarrow h(t)$

$u(t)=\delta(t) \Rightarrow y(t)=h(t)$

Konvolúció 2.



$$y(t) = \sum_{(\xi)} \left(u(\xi)\Delta\xi \cdot h(t-\xi) \right)$$

t-ben a válasz, ha a gerjesztést $\Delta\xi$ széles impulzusokra bontjuk

$\Delta\xi \to d\xi$ (infinitezimális $\Delta\xi$)

$\sum \to \int$

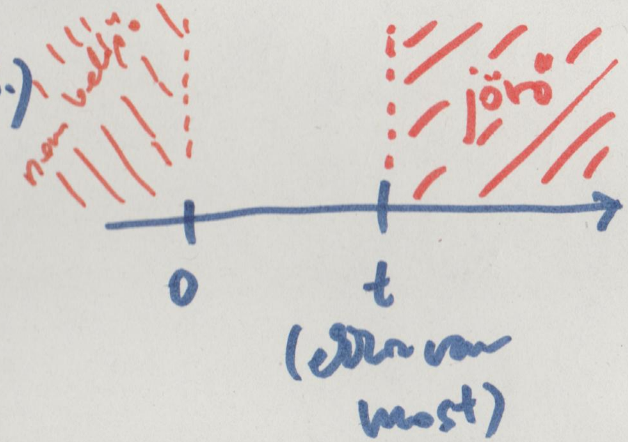
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\, h(t-\xi)\, d\xi$$

Megjegyzések:

1.) nem jósló-rendszer $\Rightarrow$ kauzális
(válasz nem függ a jövőbeli gerjesztéstől)

oretén az impulzusválasz belépő"

2.)



3.) belépő gerjesztés $u(\xi)=0$, $\xi=0$

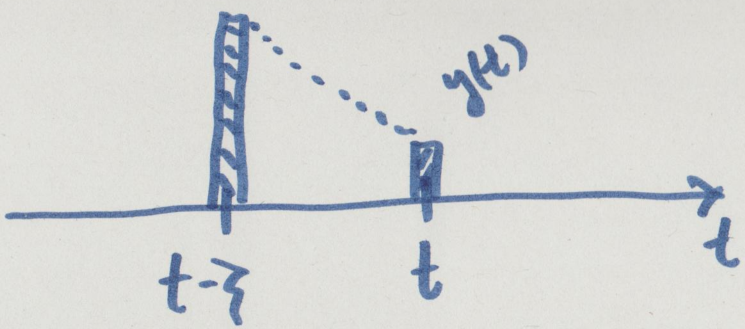
4.) belépő gerj., kauzális rsz.

$$y(t) = \int_{-0}^{t} h(t-\xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

5.) tetszőleges gerj., kauzális rsz.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

Konvolúció 3. másik alak



másik megközelítés:

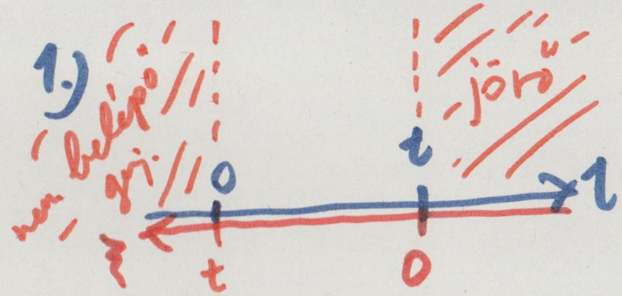
$y(t) = ?$, ha ξ-vel visszamegyünk a gerjesztéshez

$$u(t-\xi)\Delta\xi \longrightarrow h(\xi)\cdot u(t-\xi)\Delta\xi$$

$\Delta \to d$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\, u(t-\xi)\, d\xi$$

1.)



2.) kauzális r.
$h(\xi) = 0$, $\xi < 0$ esetén

3.) válasz, kauzális r., tetszőleges gerj.

$$y(t) = \int_{-0}^{\infty} h(\xi)\, u(t-\xi)\, d\xi$$

4.) válasz, kauzális r., belépő gerj.

$$y(t) = \int_{-0}^{t} h(\xi)\, u(t-\xi)\, d\xi$$

Dirac-delta

- olyan mint egy fv., de mégsem az
(disztribúció)

Tul.

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

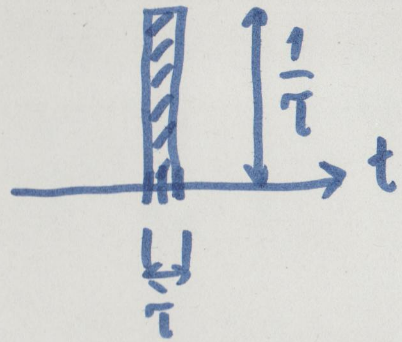
2) $\delta(t) = 0$, ha $t \neq 0$

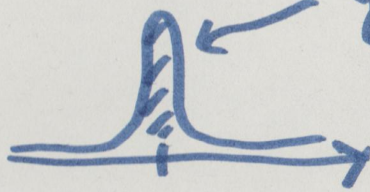
3) $$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \varepsilon(t)$$

(Kapcsolat $\varepsilon(t)$-vel Heaviside-fv.)

4.) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T)\,f(t)\,dt = f(T)$$

Közelítések (szemléltetés)

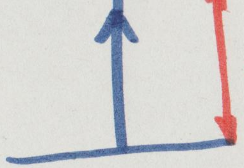




Gauss-görbe szerű valami!

Ábrázolása

pl.



nagyságát adja meg (súlyát)

Disztribúció nem a függvényt definiálja, hanem azt hogyan viselkedik, ha integrálják a függvényt a disztribúcióval. Lásd 4.) tulajdonság!

Konvolúciós feladatok

1.) $h(t) = 3\,e^{-0,1t}\,\varepsilon(t)$

Pl. elsőrendű r. állapotváltozójára vonatkozóan

$u(t) = 5\cdot\varepsilon(t)$

belépő gerj. } → válasz is belépő
kauzális r. }

$$y(t) = \int_0^t h(\xi)\,u(t-\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_0^t 3\,e^{-0,1\xi}\cdot 5\,d\xi = 15\cdot\left[\frac{e^{-0,1\xi}}{-0,1}\right]_0^t =$$

$$= \frac{15}{-0,1}\cdot\left(e^{-0,1t} - 1\right) = 150\left(1 - e^{-0,1t}\right)\varepsilon(t)$$

Miért az az alakot használtuk?

Mert $u(t-\xi)$ alakja egyszerű lett!

Megoldás másik alakkal

$$y(t) = \int_{-0}^t h(t-\xi)\,u(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{-0}^t 3\,e^{-0,1(t-\xi)}\cdot 5\,d\xi =$$

$$= 15\cdot\int_0^t e^{-0,1t}\cdot e^{0,1\xi}\,d\xi =$$

állandó ξ szerint

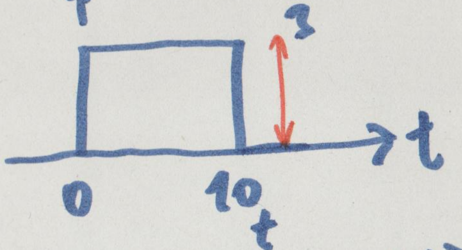
$(e^{t}-1)/0,1$

$$= 15\,e^{-0,1t}\cdot\int_0^t e^{0,1\xi}\,d\xi = 15\,e^{-0,1t}\left[\frac{e^{\xi}}{0,1}\right]_0^t$$

$$= 150\,e^{-0,1\cdot t}\left(e^{0,1t} - 1\right) = 150\left(1 - e^{-0,1t}\right)$$

$e^{-0,1t}\cdot e^{0,1t} = 1$

b) $u(t) = 3(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-10))$



$$y(t) = \int_0^t 3 e^{-0,1\xi} \cdot 3(\varepsilon(t-\xi) - \varepsilon(t-\xi-10))\, d\xi$$

célszerű a másik alakot választani ?

$$y(t) = \int_0^t 3 e^{-0,1(t-\xi)}\, 3\, (\varepsilon(\xi) - \varepsilon(\xi-10))\, d\xi$$

?

Talán egyszerűbb, ha $u(t)$-t "szétszedjük"

$$u(t) = \underbrace{3\varepsilon(t)}_{\text{erre már ismerjük a választ}} - \underbrace{3\varepsilon(t-10)}_{\text{ez az előzőhöz hasonló csak eltolt alakú}} \rightarrow ?$$

a rendszer lineáris időinvariáns ezért

$$u(t-T) \longrightarrow y(t-T)$$

$$3\varepsilon(t) \longrightarrow 90 \cdot \varepsilon(t)\left(1 - e^{-0,1t}\right)$$

$$-3\varepsilon(t-T) \longrightarrow -90\, \varepsilon(t-T)\left(1 - e^{-0,1(t-T)}\right)$$

$$y(t) = 90 \cdot \varepsilon(t)\left(1 - e^{-0,1t}\right) - 90\, \varepsilon(t-10)\left(1 - e^{-0,1(t-10)}\right)$$

2.) $h(t) = 2\delta(t) - 4e^{-0,2t}\varepsilon(t)$

$u(t) = 4\cdot\varepsilon(t)$

belépő gerjesztés + kauzális r.

$$y(t) = \int_0^t h(\xi)\,u(t-\xi)\,d\xi$$

azonban célszerűbb ($\delta(t)$ miatt) az általános alakot használni

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\,u(t-\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\delta(\xi) - 4e^{-0,2\xi}\varepsilon(\xi)\right)\cdot 4\,\varepsilon(t-\xi)\,d\xi$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(\xi)\,4\,\varepsilon(t-\xi)\,d\xi}_{I_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} -4e^{-0,2\xi}\varepsilon(\xi)\cdot 4\,\varepsilon(t-\xi)\,d\xi}_{I_2}$$

$$I_1 = 8\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)\,\varepsilon(t-\xi)\,d\xi}_{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)f(\xi)\,d\xi = f(0)} = 8\cdot\varepsilon(t)$$

$$I_2 = -16\int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,2\xi}\,\varepsilon(\xi)\cdot\varepsilon(t-\xi)\,d\xi$$

$(t>0)$!

$\neq 0$, ha $\underbrace{\xi>0}$

$\neq 0$, ha $t-\xi>0$ azaz $\underbrace{\xi<t}$

$$= -16\int_0^t e^{-0,2\xi}\,d\xi = \underbrace{\frac{-16}{-0,2}}_{80}\left(e^{-0,2t} - 1\right)$$

teljes válasz:

$$y(t) = 8\,\varepsilon(t) + 80\,\varepsilon(t)\,e^{-0,2t} - 80\,\varepsilon(t)$$

$$= \left(80e^{-0,2t} - 72\right)\varepsilon(t)$$

2/b.) $u(t) = 4$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\, u(t-\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\delta(\xi) - 4e^{-0,2\xi}\varepsilon(\xi)\right) 4 \cdot d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\,\delta(\xi)\, 4\, d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} (-4)\cdot 4 \cdot e^{-0,2\xi}\, \underbrace{\varepsilon(\xi)}\, d\xi$$

$\xi = 0$ -tól

$$= 8 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi)\, d\xi}_{1} - 16 \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-0,2\xi}\, d\xi}_{\left[\frac{e^{-0,2\xi}}{-0,2}\right]_0^{\infty} = \frac{-e^{-0,2\cdot 0}}{-0,2} = +5} =$$

$$= 8 - 80 = \underline{\underline{-72}}$$

(megegyezik az előző pontbeli állandósult válasz értékével)

Mit jelent fizikailag

$$h(t) = A \cdot \delta(t) \; ?$$

$u(t)$ tetszőleges, bejövő után

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\, u(t-\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(\xi) \cdot u(t-\xi)\, d\xi =$$

$$= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi)\, u(t-\xi)\, d\xi = A \cdot u(t)$$

a gerjesztés A-szorosára növelve a kimenetre „másolja"

pl. mint egy csak ellenállást (rezisztív elemeket) tartalmazó hálózat

3.) Másodrendű hálózat

– valós sajátértékkel

$$h(t) = \left(3e^{-0{,}5t} - 2\cdot e^{-0{,}4t}\right)\varepsilon(t)$$

$$u(t) = 5\,\varepsilon(t) \quad \longrightarrow (t>0) \text{ a válasz!}$$

$$y(t) = \int_{-0}^{t} 5\cdot\left(3e^{-0{,}5\tau} - 2e^{-0{,}4\tau}\right)d\tau =$$

$$= \int_0^t 15\,e^{-0{,}5\tau}\,d\tau + \int_0^t (-10)\,e^{-0{,}4\tau}\,d\tau =$$

$$= 15\cdot\left[\frac{e^{-0{,}5\tau}}{-0{,}5}\right]_0^t + (-10)\cdot\left[\frac{e^{-0{,}4\tau}}{-0{,}4}\right]_0^t =$$

$$= \frac{15}{-0{,}5}\cdot\left(e^{-0{,}5t} - 1\right) + \frac{-10}{-0{,}4}\cdot\left(e^{-0{,}4t} - 1\right)$$

$$y(t) = \varepsilon(t)\Big(\underbrace{\frac{15}{0{,}5}}_{30} - \underbrace{\frac{10}{0{,}4}}_{25}\Big) + \varepsilon(t)\left(\frac{10}{0{,}4}e^{-0{,}4t} - \frac{15}{0{,}5}e^{-0{,}5t}\right) =$$

$$= \varepsilon(t)\left(5 + 25\,e^{-0{,}4t} - 30\,e^{-0{,}5t}\right)$$

b.) $u(t) = 5\,\varepsilon(t)\,e^{-0{,}8t}$; $\rightarrow y(t)$ belépő!

$$y(t) = \int_0^t 5\,e^{-0{,}8(t-\tau)}\cdot\left(3e^{-0{,}5\tau} - 2e^{-0{,}4\tau}\right)d\tau =$$

$$= 5\cdot 3\int_0^t e^{-0{,}8t}\cdot e^{+0{,}8\tau}\cdot e^{-0{,}5\tau}\,d\tau +$$

$$+ 5\cdot(-2)\cdot\int_0^t e^{-0{,}8t}\cdot e^{0{,}8\tau}\cdot e^{-0{,}4\tau}\,d\tau$$

$$15\int_0^t \underbrace{e^{-0,8t}}_{\text{áll.}} \cdot \underbrace{e^{0,8\xi}\cdot e^{-0,5\xi}}_{e^{0,3\xi}}\, d\xi =$$

$$= 15\cdot e^{-0,8t}\int_0^t e^{0,3\xi}\, d\xi =$$

$$= 15\cdot e^{-0,8t}\,\frac{e^{0,3t}-1}{0,3} =$$

$$= \cancel{4}50\, e^{-0,5t} - 45\, e^{-0,8t}$$

$$-10\cdot\int_0^t e^{-0,8t}\, e^{0,8\xi}\cdot e^{-0,4\xi}\, d\xi =$$

$$= -10\, e^{-0,8t}\cdot\int_0^t e^{0,4\xi}\, d\xi =$$

$$= -25\, e^{-0,8t}\left(e^{0,4t}-1\right) =$$

$$= 25\, e^{-0,8t} - 25\, e^{-0,4t}$$

Teljes megoldás

$$y(t) = \varepsilon(t)\Big(\cancel{4}50 e^{-0,5t} - \cancel{4}50 e^{-0,8t} +$$

$$+ 25 e^{-0,8t} - 25 e^{-0,4t}\Big) =$$

$$= \varepsilon(t)\left(50 e^{-0,5t} - 25 e^{-0,4t} - 25 e^{-0,8t}\right)$$