Feladatok konvolúció alkalmazására

Elméleti összefoglaló

Jelölje a rendszer gerjesztését $u(t)$, amelynek mértékegysége tetszőleges. Legyen a rendszer válasza $y(t)$, amelynek mértékegysége szintén tetszőleges. A rendszer impulzusválaszát jelöli $h(t)$, amelynek mértékegysége azonban az idő, gerjesztés és válasz mértékegységeinek függvénye :

$$[h] = \frac{[y]}{[u] \cdot [t]}$$

A rendszer válaszának kiszámítására két alakot ismerünk :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)u(t-\xi)\ d\xi \tag{1}$$

A másik alak

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\xi) \cdot u(\xi)\ d\xi \tag{2}$$

A két alak mondanivalójában különbözik. Az első szerint a t pillantban a ξ-vel korábbi gerjesztés hatását kapjuk meg, a $t-\xi$-beli $u(t-\xi)\cdot d\xi$ erősségű Dirac-impulzusra adott válasz alapján. A ξ végigfut a lehetséges gerjesztés értékeken, és a kapott válasz a t-beli válasz értékét adja.

A második alak szerint ξ pillanatban lévő $u(\xi)\cdot d\xi$ erősségű Dirac-impulzus hatását látjuk a $t-\xi$ idővel későbbi t pontban. A ξ futóváltozó végig fut a lehetséges értékeken és ezáltal adódik a t-beli válasz érték.

Megkötések hatása a konvolúciós integrálra

A rendszerek esetében célszerűen a kauzális rendszereket részesítjük előnyben (például mert ezek megvalósíthatóak) a legtöbb esetben. Ekkor az impulzusválasz belépő jellegű lesz, amely a kiértékelendő tartomány méretét csökkenti.

Az 1 esetben a $h(\xi) = 0$, ha $\xi < 0$, ezért az integrálás alsó határa zérusra változik az alábbiak szerint :

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\xi)u(t-\xi)\ d\xi \tag{3}$$

A 2 esetben $h(t-\xi) = 0$, ha $t-\xi < 0$ azaz $t < \xi$, ezért $\xi \le t$ esetre kell integrálni.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\xi) \cdot u(\xi)\ d\xi \tag{4}$$

A belépő gerjesztés esetében (1)-nál $u(t-\xi) \equiv 0$ ha $t-\xi < 0$, ezért $\xi \leq t$ az integrálás felső határa. Hasonló gondolatmenettel a 2 esetében is, itt az integrálás alsó határa lesz 0.

A konvolúció "h-taus" alakja kauzális rendszer és belépő gerjesztés esetében :

$$y(t) = \int_0^t h(\xi)u(t-\xi)\ d\xi \tag{5}$$

Az "u-taus" alak pedig

$$y(t) = \int_0^t h(t-\xi) \cdot u(\xi)\ d\xi \tag{6}$$

1. Feladatok - Elsőrendű rendszerek

a.

A rendszer gerjesztése és válasza is feszültség, az időegység μs. Az impulzusválasz $h(t) = 5 \cdot \varepsilon(t) \cdot e^{-4t} \mu s^{-1}$.

- Számítsuk ki a rendszerugrásválaszát!
- Határozzuk meg a választ, ha a gerjesztés $u(t) = 3\varepsilon(t) \cdot e^{-2t} V$!
- Adjuk meg a választ az $u(t) = 3 \cdot (\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2))\, V$ gerjesztésre!
- Számítsuk ki $y(t)$-t a nembelépő $u(t) = (2-2\varepsilon(t))V$ gerjesztés esetében!

b.

A rendszer gerjesztése áram, válasza feszültség. A koherens egységrendszer V, mA, ns. A rendszer $\varepsilon(t)$-re adott válasza

$$g(t) = \varepsilon(t)\left(4 - 3e^{-2t}\right)$$

- Adjuk meg az ugrásválasz mértékegységét!
- Határozzuk meg az impulzusválaszt!
- Számítsuk ki a $20mA\varepsilon(t)$ gerjesztésre adott választ! (Mutassuk meg az eredményt a konvolúció alkalmazása nélkül is!)
- Mi lesz a válasz a nem-belépő $5mA$ gerjesztés esetében?

2. Feladatok - Másodrendű rendszerek

a.

$h(t) = \varepsilon(t)\left(2e^{-t} - 3e^{-t/0{,}8}\right)$

- $g(t) =$
- $u(t) = 2e^{-3t}\varepsilon(t)$
- $u(t) = 0{,}5 \cdot e^{-t} \cdot \varepsilon(t)$

b.

$g(t) = (3 + 2e^{-t} - t \cdot e^{-t})\,\varepsilon(t)$

- $h(t) =$
- $u(t) = 3\varepsilon(t) \cdot e^{-2t}$

c.

$h(t) = 2\delta(t) + 3e^{-t/5}\cos(\pi t)\,\varepsilon(t)$

- $g(t) =$
- $u(t) = 2\varepsilon(t - T)$