Szinuszos hálózatok 2.
Többfrekvenciás gerjesztés

Reichardt, András

2019. május 7.

Tartalomjegyzék

1. Többfrekvenciás gerjesztés

1.1. Illusztratív példa

1.1.1. Feladat

Az alábbi hálózatban a feszültségforrás feszültsége a gerjesztés, a válasz a bejelölt i áram. A hálózat paraméterei egy adott frekvencián mérhető látszólagos impedanciával adottak.

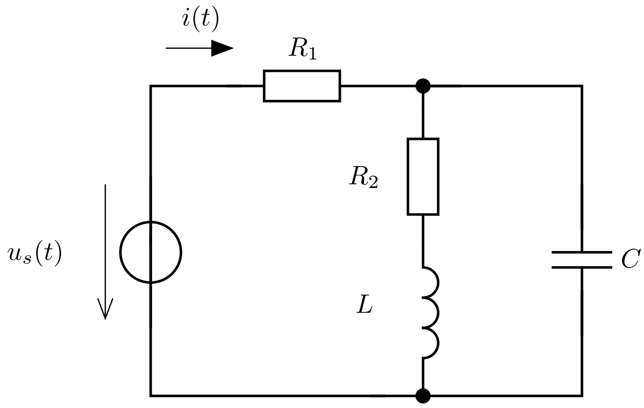
A forrás feszültségének időfüggvénye

$$u_s(t) = [10 + 5 \cdot \cos(\omega_1 t) + 7 \cdot \cos(\omega_2 t + \pi/3)]\, V$$

Az $\omega = \omega_1$ frekvencián az elemek látszólagos ellenállása az alábbi :

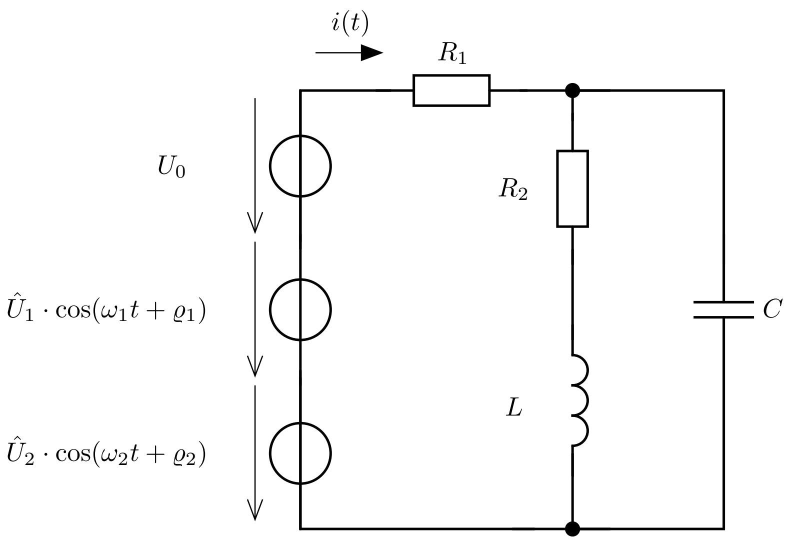
$$\omega_1 L = \frac{2}{3\omega_1 C} = 10\Omega, R_2 = 15\Omega, R_1 = 10\Omega$$

A gerjesztés frekvenciáira fenn áll, hogy $\omega_2 = 2\omega_1$. Határozza meg a bejelölt $i(t)$ áramot!



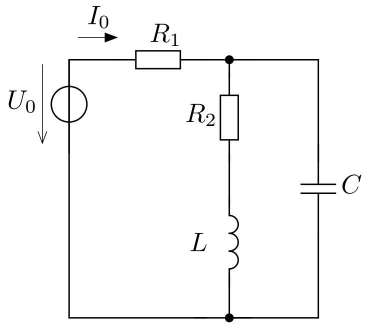
1.1.2. Megoldás

A válasz meghatározásához a szuperpozíció elvét használjuk fel. A gerjesztés alakjából a hálózatot átrajzolhatjuk az alábbi alakúra, ahol a az egyes generátorok csak egy-egy adott frekvencián működnek.

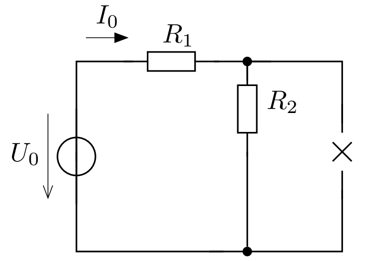


A szuperpozícióval a különböző frekvenciájú gerjesztéseket leválasztjuk egymástól, a hatásukat külön-külön kiszámítjuk, majd a végén az időfüggvényeket összeadva megkapjuk a választ.

Egyenösszetevő A zérus frekvenciájú (egyen vagy DC) összetevő hatása



helyettesíthető

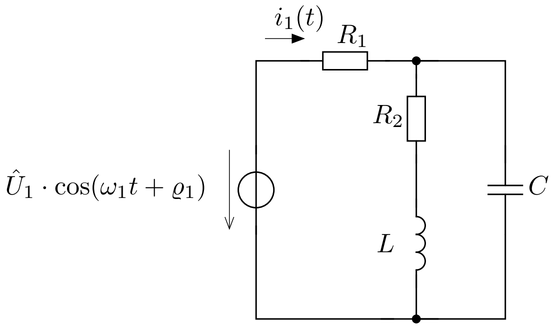


A kondenzátor az állandó gerjesztés hatására szakadásként viselkedik, a tekercs pedig rövidzárként. Ezen tulajdonságokat használtuk fel az előző helyettesítésnél.

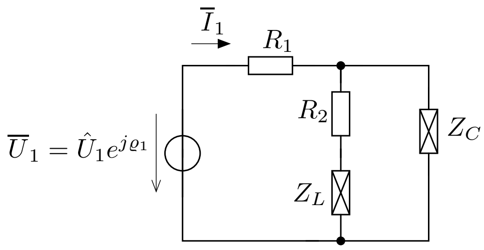
A keresett áramra adódik, hogy

$$I_0 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{10}{10 + 15} A = 0{,}4A$$

Első frekvencia Az $\omega = \omega_1$ frekvenciájú gerjesztés hatására létrejövő áramhoz



impedanciákkal



ahol $Z_L = j\omega_1 L$ és $Z_C = \frac{1}{j\omega_1 C}$ jelentenek. A feladat kiírásában erre a frekvenciára vonatkozó látszólagos impedancia értékeket kaptunk, ezért

$$Z_L = j\omega_1 L = j \cdot 10\Omega$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega_1 C} = -j\frac{30}{2}\Omega = -15j\Omega$$

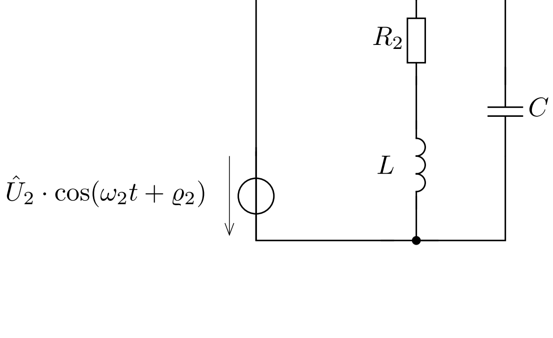
Az áram kiszámítására a forrásra kapcsolt kétpólus eredő impedanciáját kell meghatározni.

$$Z = R_1 + (R_2 + Z_L) \times Z_C = 10 + (15 + 10j) \times (-15j) = (23{,}5 - 10{,}5j)\Omega$$

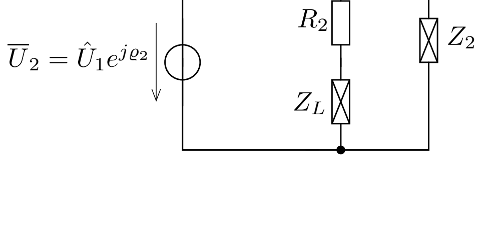
$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_1}{Z} = \frac{5}{23{,}5 - 10{,}5j} A = 0{,}1943 e^{j0{,}42} A$$

Az áram időfüggvénye $i_1(t) = 0{,}1943 \cdot \cos(\omega_1 t + 0{,}42)A$

Második frekvencia Az ω_2 frekvenciájú gerjesztés hatásának kiszámítása :



impedanciákkal



Hasonlóan az előző frekvenciánál alkalmazottakhoz, itt is adódik :

$$Z_L = j\omega_2 L = j2\omega_1 L = 2\cdot j\omega_1 L = 20j\Omega$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega_2 C} = -j\frac{2\omega_1 C}{=}\frac{1}{2}\cdot\left(-j\frac{1}{\omega_1 C}\right) = -7{,}5j\Omega$$

Az eredő impedancia és az áram komplex csúcsértéke

$$Z = R_1 + (R_2 + Z_L)\times Z_C = 10 + (15+20j)\times(-7{,}5j) = (12{,}213 - 9{,}344j)\Omega$$

$$\overline{I_2} = \frac{\overline{U_2}}{Z} = \frac{7e^{j\pi/3}}{12{,}213 - 9{,}344j} = 0{,}4552\ e^{j1,7}A$$

Az áram időfüggvénye

$$i_2(t) = 0{,}4552\cdot\cos\left(\omega_2 t + 1{,}7\right)A$$

Teljes megoldás A teljes megoldás (szuperpozíció módszerének megfelelően) az áramok időfüggvényeinek összege

$$i(t) = i_0(t) + i_1(t) + i_2(t) = \left(0{,}4 + 0{,}1943\cdot\cos(\omega_1 t + 0{,}42) + 0{,}4552\cdot\cos\left(\omega_2 t + 1{,}7\right)\right)A$$

1.1.3. További megfontolások

Átviteli karakterisztika számítása Az előző megoldásból láthatóan a különböző frekvenciájú gerjesztésekre adott válaszok hasonlóan számíthatóak ki, csak a frekvencia változik. Ha a frekvenciát mint paramétert tekintjük, akkor egy olyan összefüggést kapunk, amely összeköti a válasz komplex amplitúdóját és a gerjesztés komplex amplitúdóját. Ezen összefüggést az átviteli karakterisztika megnevezéssel illettük.

Határozzuk meg az átviteli karakterisztikát ebben a hálózatban!

A számítások során az ω-t paraméterként hagyjuk meg, a többi hálózati paramétert (R_1, R_2, L, C) pedig nem helyettesítjük be.

$$Z = R_1 + (R_2 + j\omega L)\times\frac{1}{j\omega C} = R_1 + \frac{Z_C\cdot(R_2+Z_L)}{R_2+Z_L+Z_C} =$$

behelyettesítjük Z_L és Z_C helyére a megfelelő kifejezéseket (némi rendezés után)

$$Z = \frac{(j\omega)^2 CLR_1 + j\omega(L + R_1R_2C) + (R_1+R_2)}{(j\omega)^2 LC + j\omega R_2 C + 1} = R_1\frac{(j\omega)^2 + j\omega\left(\frac{1}{R_1C}+\frac{R_2}{L}\right) + \frac{R_1+R_2}{CLR_1}}{(j\omega)^2 + j\omega\frac{R_2}{L} + \frac{1}{LC}}$$

A válasz és gerjesztés kapcsolata (az átviteli karakterisztika)

$$I = \frac{U_s}{Z} = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{(j\omega)^2 + j\omega\frac{R_2}{L} + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + j\omega\left(\frac{1}{R_1C}+\frac{R_2}{L}\right) + \frac{R_1+R_2}{CLR_1}}$$

A feladat nem adta meg az ω_1 értékét, hiszen az ilyesfajta paraméter megadásnak ez a lényege, azonban most feltételezzük, hogy $\omega_1 = 1$ krad/s. Számítsuk ki az átviteli karakterisztika alakját ebben az esetben!

Behelyettesítéssel adódik az ismeretlen hálózati paraméterekre, hogy

$$L = \frac{10\Omega}{\omega_1} = 10\text{ mH; és } C = \frac{2}{3\omega_1 10\Omega} = \frac{200}{3}\mu F \approx 66{,}6\mu F$$

Az átviteli karakterisztika a koherens egységrendszerben (V,A,Ω, mH, mF, krad/s, ms)

$$H(j\omega) = 0{,}1\cdot\frac{(j\omega)^2 + 1{,}5j\omega + 1{,}501}{(j\omega)^2 + 3{,}001j\omega + 3{,}7537}$$

Átviteli karakterisztika számítása Az átviteli karakteriszika alakja polinom/polinom $j\omega$-ban. Ezt kihasználjuk a számításkor és ábrázoláskor, amikor a MATLAB segítségével dolgozunk.

A polinomot az együtthatóival egyértelműen meghatározhatjuk. Ezért a

$$(j\omega)^2 + 1{,}5j\omega + 1{,}501 \text{ reprezentálható } [1; 1{,}5; 1{,}501]$$

vektorral. A nevezőnél hasonlóan járunk el.

Az átviteli karakterisztika egy valós változós, komplex értékű függvény. Ezért egyértelmű az ábrázolása, ha a ω függvényében ábrázoljuk az abszolút értékét és a fázisszögét (Bode-diagram) vagy ha az egyes frekvenciákon az átviteli tényezők fazorának végpontját (Nyquist-diagram).

Az ábrázolásunk alapelve, hogy ha megfelelően sűrű a frekvenciaháló, akkor az egymás utáni pontokat összekötve kapjuk a megfelelő diagramot.

Bode-diagram Az ábázolás lépései az alábbiak :

1. Megadjuk a számláló polinomjának vektor reprezentációját !

```
num = 0.1 * [1 1.5 1.501]
den = [1 2.3001 3.7537];
```

2. Felvesszük a frekvenciákat, ahol kiszámítjuk az átvitelt. Az $\omega = 10^{-2}$ és $\omega = 10^2$ között 10000 darab pontot veszünk fel.

```
[om] = logspace(-2,2,1e4);
```

3. Minden frekvenciapont kiszámítjuk a számláló és a nevező értékét, majd elosztjuk ezeket egymással. Szerencsére a MATLAB-ban erre vannak megfelelő parancsok (`polyval` a polinom kiértékelés, `./` az elemenkénti osztás műveletét valósítja meg).

```
H = polyval(num, j*om) ./ polyval(den, j*om);
```

4. Kiszámítjuk az amplitúdókat és fázisokat.

```
K = abs(H);
fi= angle(H);
```

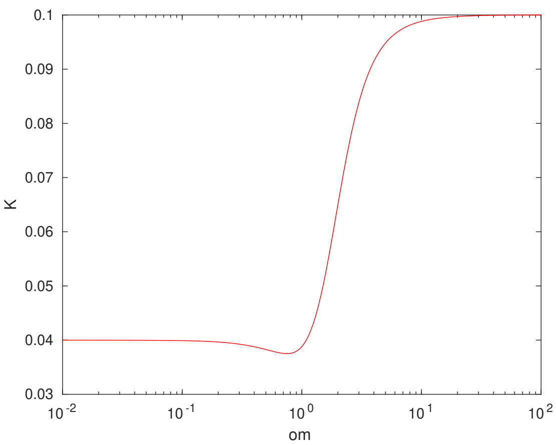
5. Ábrázoljuk az amplitúdót az om függvényében.

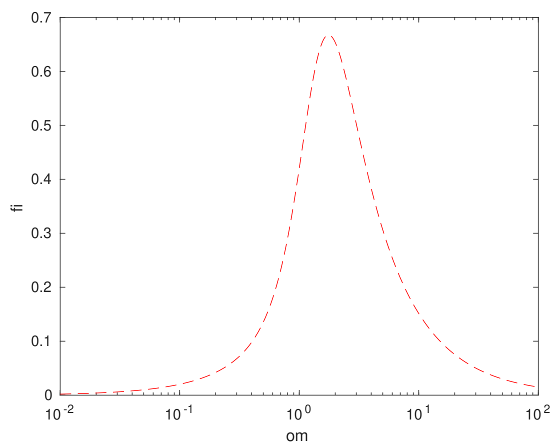
```
figure; semilogx( om, K, 'r-'): xlabel('om'); ylabel('K');
```

6. Másik ábrában ábrázoljuk a fázist az om függvényében.

```
figure; semilogx( om, fi, 'r--'); xlabel('om'); ylabel('fi');
```

Ábrázolásunk eredménye alább látható.

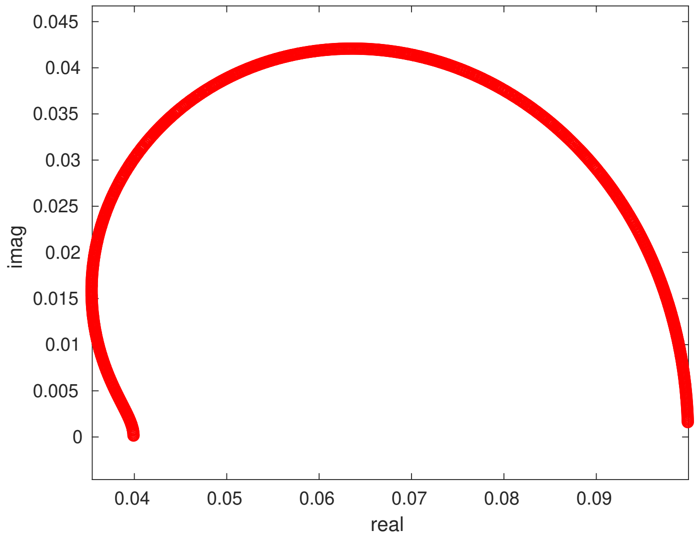




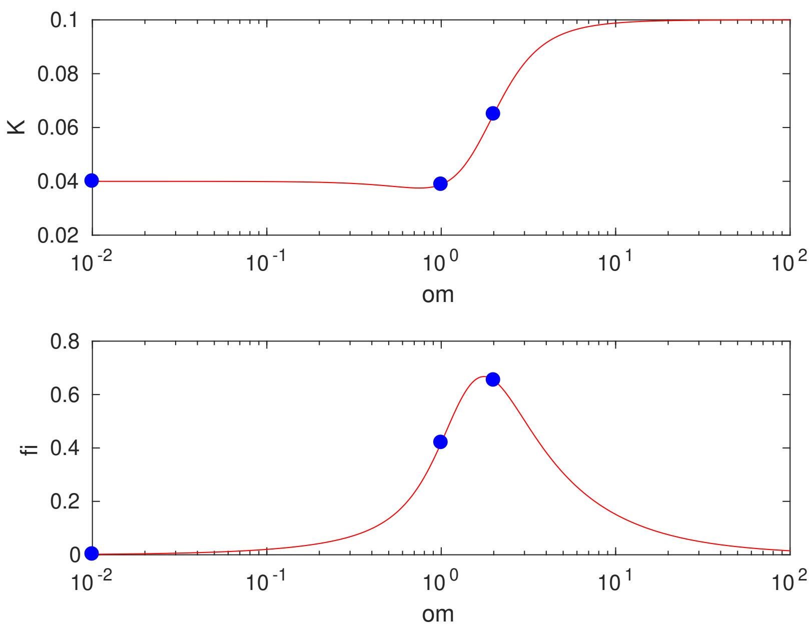
Nyquist-diagram Az előző pont eredményeit használjuk fel! Az átviteli tényezőt kiszámítottuk a felvett frekvenciapontokban, most csak ábrázolni kell a fazorok végpontját.

```
figure;
        plot(real(H), imag(H), 'ro');
        xlabel('real'); ylabel('imag');
```

Ennek eredménye pedig



Hol gerjesztettünk? Tegyük egy ábrába az átviteli karakterisztikát és azon pontokat, ahol a gerjesztés által kiválasztott összetevők vannak.



2. Példák többfrekvenciás gerjesztésre

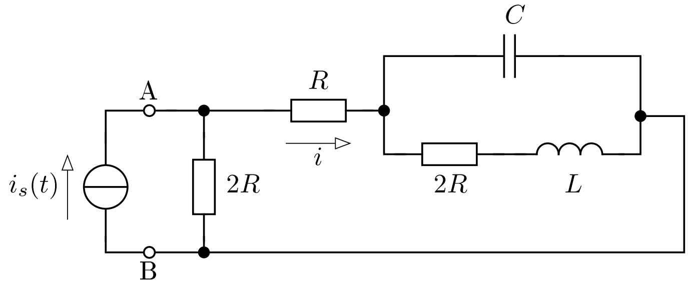
2.1. Csatolt kétpólust nem tartalmazó hálózat

Az alábbi hálózat esetén a válasz a bejelölt i áram. Az áramforrás időfüggvénye

$$i_s(t) = [10 + 3 \cdot \cos(\omega_0 t + 0{,}5)] \text{ mA}$$

a. Számítsuk ki a bejelölt i áram időfüggvényét!

b. Határozzuk meg az AB kétpólus (által felvett) hatásos és meddő teljesítményét! Adjuk meg az áramforrás teljesítményeit!

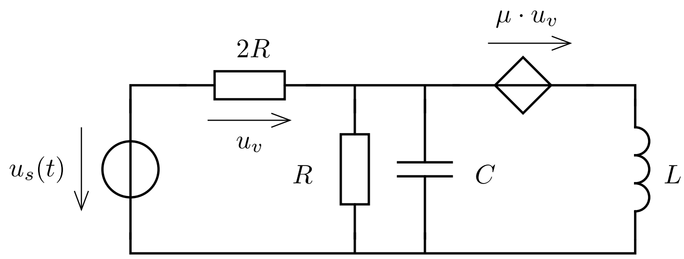


A hálózat paraméterei : $R = 5$ kΩ, $L = 0{,}5$ mH, $C = 5$ pF, $\omega_0 = 10$ Mrad/s.

2.2. Vezérelt feszültségforrást tartalmazó hálózat

A hálózat paraméterei : $\mu = 0{,}5$, $R = 50\Omega$, $C = 0{,}00125$ mF, $L = 0{,}02$ H, $\omega_0 = 8$ krad/s

$$u_s(t) = [3 + 2 \cdot \cos(\omega_0 t)] \text{ V}$$



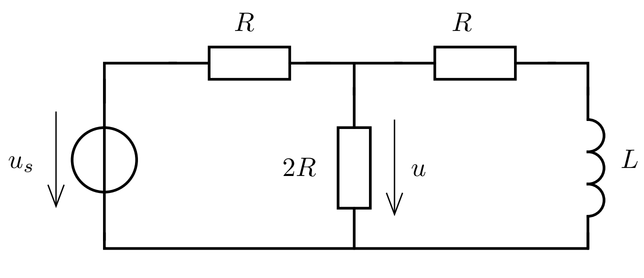
a. Határozzuk meg az R ellenállás feszültségének időfüggvényét!

b. Számítsuk ki az RC-tag hatásos és meddő teljesítményét!

c. Tekintsük μ-t valós paraméternek és adjuk meg a hálózat által reprezentált rendszer átviteli karakterisztikáját, ha a feszültségforrás feszültsége a gerjesztés a válasz pedig az R ellenállás feszültsége!

2.3. Átviteli karakterisztika egyszerű hálózatnál

Határozzuk meg az alábbi hálózat esetén az átviteli karakterisztikát (válasz a 2R ellenállás feszültsége, gerjesztése a feszültségforrás feszültsége)!

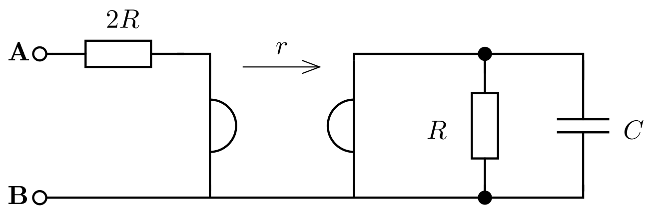


Ábrázoljuk az átviteli karakterisztika amplitúdóját és fázisát a körfrekvencia függvényében! ($R = 2$ kΩ, $L = 3$ mH)

Oldjuk meg a feladatot, ha a válasz a tekercs feszültsége!

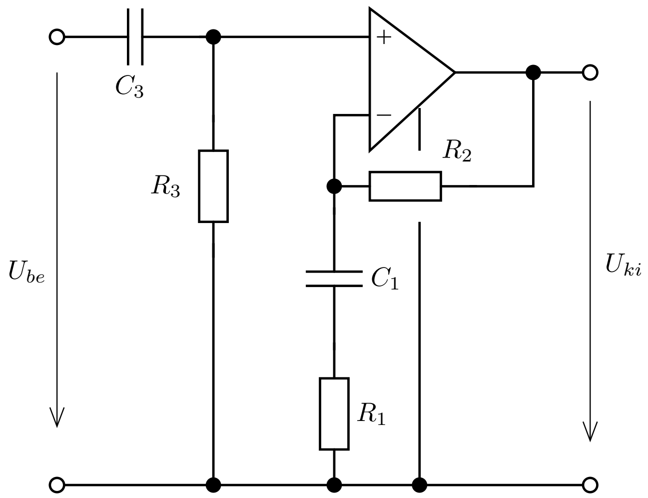
2.4. Impedanciakarakterisztika girátor esetében

Állapítsuk meg az alábbi kétpólus impedancia karakterisztikáját (az impedanciát mint a körfrekvencia függvényét)!



2.5. Ideális erősítőt tartalmazó hálózat

Tekintsük az alábbi hálózatot, amely ideális műveleti erősítőt tartalmaz! Tetszőleges ω körfrekvencián határozzuk meg az U_{ki}/U_{be}, feszültségátviteli tényezőt!



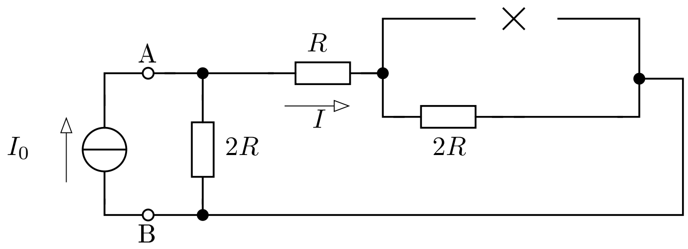
Ábrázoljuk MATLAB segítségével az feszültség átviteli karakterisztikát Bode-diagram és Nyquist-diagram alakjában! (Ne használjuk a MATLAB `bode` illetve `nyquist` parancsát!) Valamely koherens egységrendszerben a hálózati paraméterek értéke : $R_1 = R_2 = 1; R_3 = 2; C_1 = 1; C_3 = 2$.

3. Megoldások a példákra

3.1. A 2.1. feladat megoldása

a. Koherens egységrendszer : V, mA, kΩ, mH, Mrad/s, μs, nF.
A gerjesztést két részre bontva megoldjuk $\omega = 0$ és $\omega = \omega_0$ frekvencián.

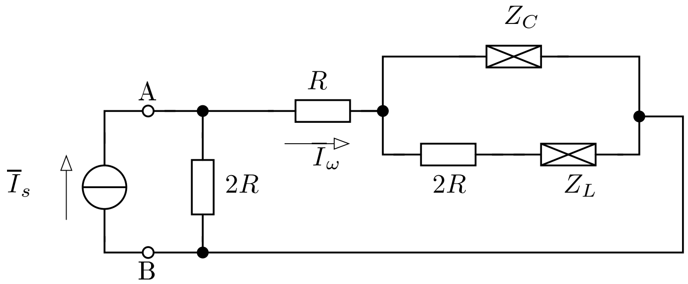
– $\omega = 0$: gerjesztés $I_0 = 10$ mA. Helyettesítjük a kondenzátort szakadással ($\lim_{\omega\to 0} \frac{1}{j\omega C} = \infty$) és a tekercset rövidzárral ($\lim_{\omega\to 0} j\omega L = 0$).



$$I = \frac{(2R+R)\times 2R}{2R+R}\cdot I_0 = \frac{3R\times 2R}{3R}I_0 = \frac{6/5R}{3R}I_0 = \frac{2}{5}I_0 = 4\text{ mA}$$

– $\omega = \omega_0$. $\overline{I}_s = 3\cdot e^{j0{,}5}$ mA. Az impedanciák értéke ($C = 0{,}005$ nF)

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\cdot 10\cdot 0{,}005} = -20j\ k\Omega; \qquad Z_L = j\omega L = j\cdot 10\cdot 0{,}5 = 5jk\Omega$$



Áramosztás alapján

$$\frac{\overline{I}_\omega}{\overline{I}_s} = \frac{2R\times(R+(2R+Z_L)\times Z_C)}{R+(2R+Z_L)\times Z_C} = \frac{10\times(5+(10+5j)\times -20j)}{5+(10+5j)\times -20j} =$$
$$= \frac{10\times(5+12{,}307-j1{,}5385)}{5+12{,}307-j1{,}5385} = \frac{6{,}3497-0{,}2057j}{17{,}308-j1{,}5385} = 0{,}3650+0{,}0206j = 0{,}3656\cdot e^{j0{,}056}$$

$$\overline{I}_\omega = \overline{I}_s\cdot 0{,}3656\cdot e^{j0{,}056} = 1{,}0968\cdot e^{j0{,}556}\text{ mA}$$

Az áram időfüggvénye az időfüggvények összege :

$$i(t) = [4 + 1{,}0968\cdot\cos(\omega_0 t + 0{,}556)]\ \text{mA}$$

b. Felhasználjuk az a.-beli eredményeket. A teljesítményeket összegezhetjük, mert a vizsgált gerjesztés egyes tagjai különböző frekvencián "működnek".

A kétpólus teljesítményéhez a 2R ellenállás feszültségét kell ismerni, amely azonos a vele párhuzamosan kötött másik ág feszültségével (ennek az ágnak az árama volt az előző feladatbeli kérdés). Ezért a másik ág eredő ellenállásával (impedanciájával) fejezzük ki a feszültséget az ismert áram felhasználásával. A kétpólus árama az áramforrás forrásáramával egyezik meg.

– $\omega = 0$: $U = I \cdot (R + 2R) = 3R \cdot \frac{2}{5} I_0 = 60$ V. Innen $P_0 = U_0 \cdot I_0 = 60V \cdot 10mA = 600mW$

– $\omega = \omega_0$:

$$\overline{U}_\omega = \overline{I}_\omega \cdot (R \times (2R + Z_L) \times Z_C) = 1{,}0968 \cdot e^{j0{,}556} \cdot (17{,}308 - j1{,}5385) = 19{,}059\ e^{j0{,}467}\ \mathrm{V}$$

$$\overline{I}_\omega = \overline{I}_s \qquad \Rightarrow \qquad \overline{S} = \frac{1}{2}\overline{U}_\omega \overline{I}_\omega^\star = \frac{1}{2} \cdot 19{,}059\ e^{j0{,}467} \cdot 3\ e^{-j0{,}5} = (28{,}57 - j0<9257)\ \mathrm{mVA}$$

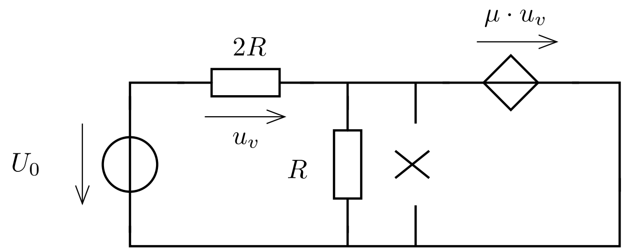
– Az összes energia : $P = (600 + 28{,}57)$mW, $Q = -0{,}9257$ mvar

3.2. A 2.2. feladat megoldása

Koherens egységrendszer : V, A, Ω, H, krad/s, ms, mF

a. A gerjesztést két részre bontjuk, meghatározzuk az egyes gerjesztésekre a választ, majd összegezzük azokat.

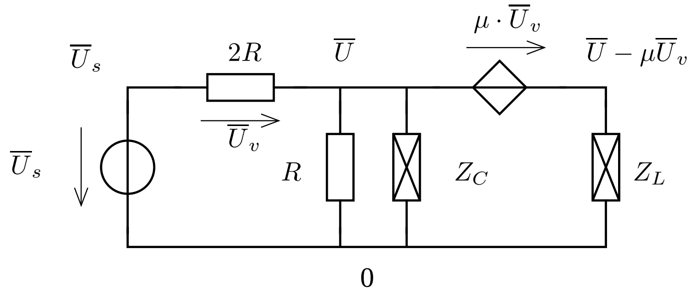
– $\omega = 0$: A kondenzátort szakadással, a tekercset rövidzárral helyettesítjük.



$$U = \mu \cdot U_v; U_0 = \mu U_v + U_v \quad \Rightarrow \quad U_v = \frac{U_0}{1 + \mu}$$

$$U = \mu \cdot U_v = \mu \cdot \frac{U_0}{1 + \mu}; \qquad U = 0{,}5 \cdot \frac{3}{1 + 0{,}5} = 1V$$

– $\omega = \omega_0$: $Z_L = j\omega_0 \cdot L = j \cdot 8 \cdot 20 = 160j$, $Z_C = \frac{1}{j\omega_0 C} = -j\frac{1}{8 \cdot 0{,}00125} = -100j$, $\overline{U}_s = 2$.



$$\overline{U}_v = \overline{U}_s - \overline{U}_\omega; \frac{\overline{U}_\omega}{R} + \frac{\overline{U}_\omega}{Z_C} + \frac{\overline{U}_\omega - \mu(\overline{U}_s - \overline{U}_\omega)}{Z_L} + \frac{\overline{U}_\omega - \overline{U}_s}{2R} = 0$$

$$\overline{U}_\omega = \frac{\frac{\mu\overline{U}_s}{Z_L} + \frac{\overline{U}_s}{2R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1+\mu}{Z_L}} = \frac{0{,}02 - 0{,}0063}{0{,}03 + 0{,}0006} = (0{,}6620 - j0{,}2222) = 0{,}6983 \cdot e^{-j0{,}324}$$

– Teljes időfüggvény :

$$u(t) = [1 + 0{,}6983 \cdot \cos(\omega_0 t - 0{,}324)]\ \ \mathrm{V}$$

b. Hasonlóan az előző ponthoz, felhasználva az ottani eredményeket. Az RC-tag feszültsége megegyezik az előző pontban számolt feszültséggel, az RC-tag impedanciája pedig számítható.

– $\omega = 0$:

$$P_0 = \frac{(1V)^2}{50\Omega} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ W}$$

– $\omega = \omega_0$:

$$\overline{S}_\omega = \frac{1}{2}\overline{U}_\omega \overline{I}^\star_\omega = \frac{1}{2}\overline{U}_\omega \left(\frac{\overline{U}_\omega}{Z_{RC}}\right)^\star = \frac{1}{2}\frac{|\overline{U}_\omega|^2}{Z^\star_{RC}}$$

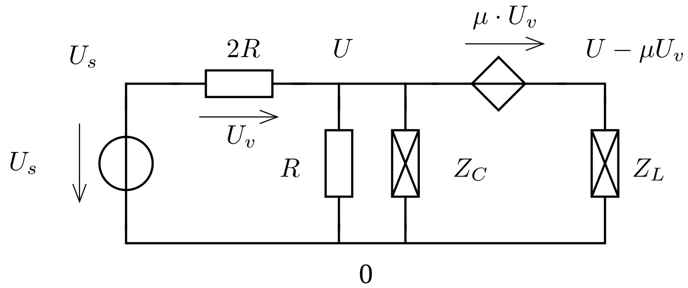
$$Z_{RC} = R \times Z_C = 50 \times -100j = 40 - 20j$$

$$\overline{S}_\omega = \frac{1}{2}\left|0{,}6983 \cdot e^{-j0{,}324}\right|^2 \cdot \frac{1}{40+20j} = (0{,}00487 - j0{,}00244) \text{ VA}$$

– Teljes hatásos teljesítmény : $P = (0{,}02 + 0{,}00487) = 0{,}02487 \text{ W} = 24{,}87\text{mW}$

A meddő teljesítmény : $Q = -0{,}00244$ var$= -2{,}44$ mvar

c. R,L,C pozitív valós paraméter, a μ erősítés valós paraméter. A gerjesztés az ω körfrekvenciához tartozó komplex csúcsérték, a keresett válasz az R ellenállás feszültségének ugyanezen körfrekvenciához tartozó komplex csúcsértéke. A komplex írásmódhoz tartozó hálózati alak



$$U_V = U_s - U; \qquad \text{és} \qquad \frac{U}{Z_C} + \frac{U}{R} + \frac{U - U_s}{2R} + \frac{U - \mu U_v}{Z_L} = 0$$

$$U\left(\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{Z_L}\right) - \mu \cdot (U_s - U) \cdot \frac{1}{Z_L} - \frac{U_s}{2R} = 0$$

$$U\left(\frac{3}{2R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1+\mu}{Z_L}\right) = \left(\frac{\mu}{Z_L} + \frac{1}{2R}\right) U_s$$

$$U \cdot \frac{2RZ_L + 3Z_C Z_L + (1+\mu)2RZ_C}{2R \cdot Z_C \cdot Z_L} = \frac{\mu 2R + Z_L}{2R \cdot Z_L} U_s$$

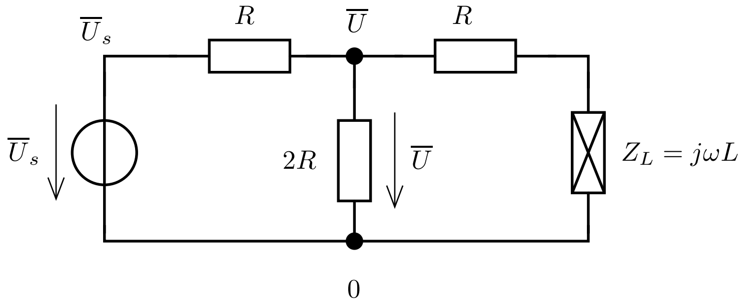
$$\frac{U}{U_s} = \frac{(\mu 2R + Z_L)Z_C}{2RZ_L + 3Z_C Z_L + (1+\mu)2RZ_C} = \frac{\dfrac{2R\mu + j\omega L}{j\omega C}}{2RL \cdot j\omega + \frac{j\omega 3L}{j\omega C} + \frac{2R(1+\mu)}{j\omega C}} =$$

$$= \frac{2R\mu + j\omega L}{(j\omega)^2 2LRC + j\omega 3L + 2R(1+\mu)} = \frac{L}{2LRC} \cdot \frac{j\omega + \dfrac{\mu 2R}{L}}{(j\omega)^2 + j\omega\frac{3}{2RC} + \frac{1+\mu}{LC}}$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{2RC}\frac{j\omega + \frac{\mu 2R}{L}}{(j\omega)^2 + j\omega\frac{3}{2RC} + \frac{1+\mu}{LC}}}$$

3.3. A 2.3. feladat megoldása

a. Tekintsük a komplex írásmódhoz átrajzolt hálózatot!



Az $\overline{U}$ csomópontra felírva csomóponti törvényt :

$$\frac{\overline{U}}{2R} + \frac{\overline{U} - \overline{U}_s}{R} + \frac{\overline{U}}{R + Z_L} = 0$$

$$\overline{U} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R + Z_L} \right) = \frac{\overline{U}_s}{R}$$

$$H = \frac{\overline{U}}{\overline{U}_s} = \frac{1/R}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R + Z_L}} = \frac{1/R}{\frac{3}{2R} + \frac{1}{R + Z_L}} = \frac{1/R}{\frac{3R + 3Z_L + 2R}{2R(R + Z_L)}} = \frac{2(R + Z_L)}{5R + 3Z_L}$$

$$H = \frac{j\omega 2L + 2R}{j\omega 3L + 5R} = \frac{2}{3} \cdot \frac{j\omega + \frac{R}{L}}{j\omega + \frac{5R}{3L}}$$

b. A paraméterek behelyettesítésével adódik

$$H(j\omega) = \frac{2}{3} \cdot \frac{j\omega + 2/3}{j\omega + 10/9}$$

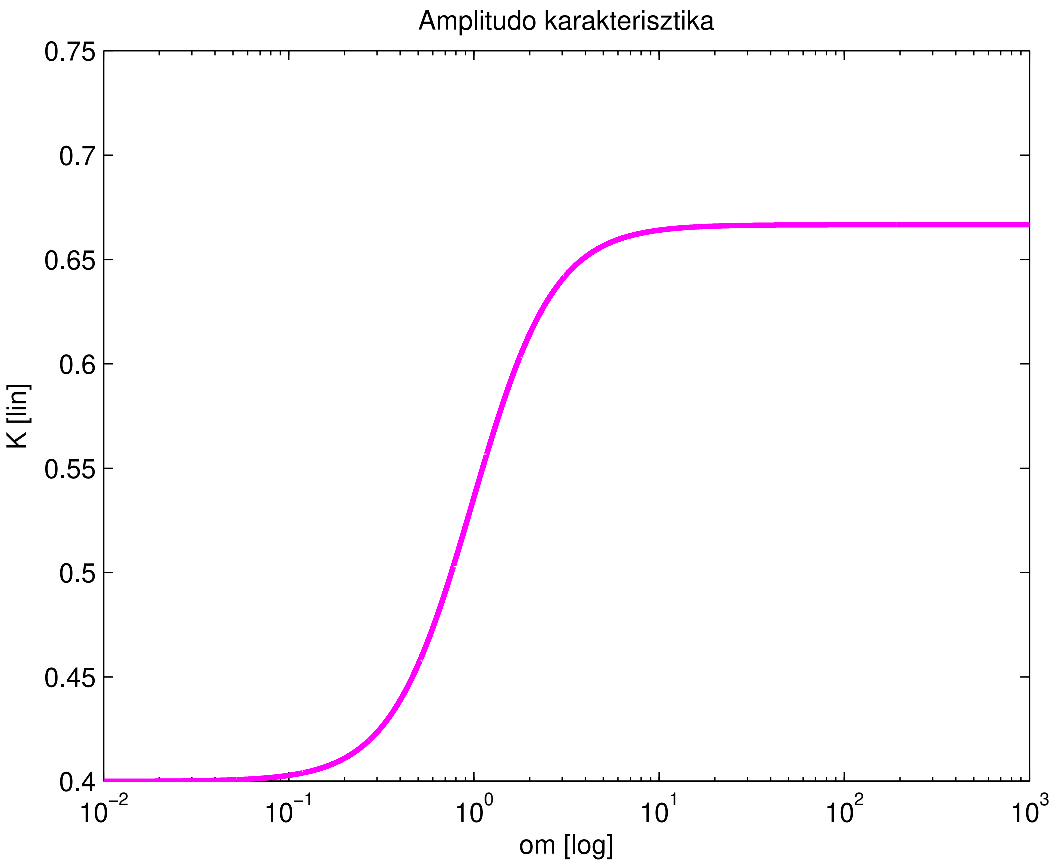
Ennek ábrázolása a mellékelt p3.m file-ban található.

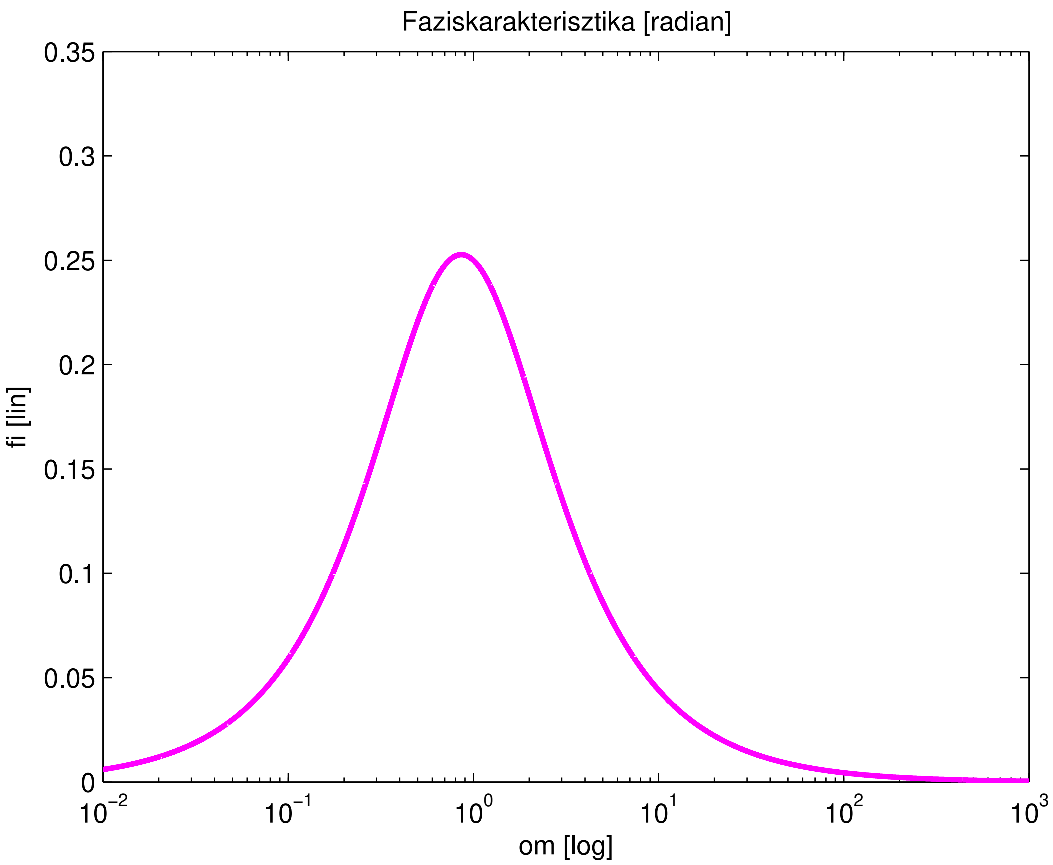
Listing 1. p3b.m

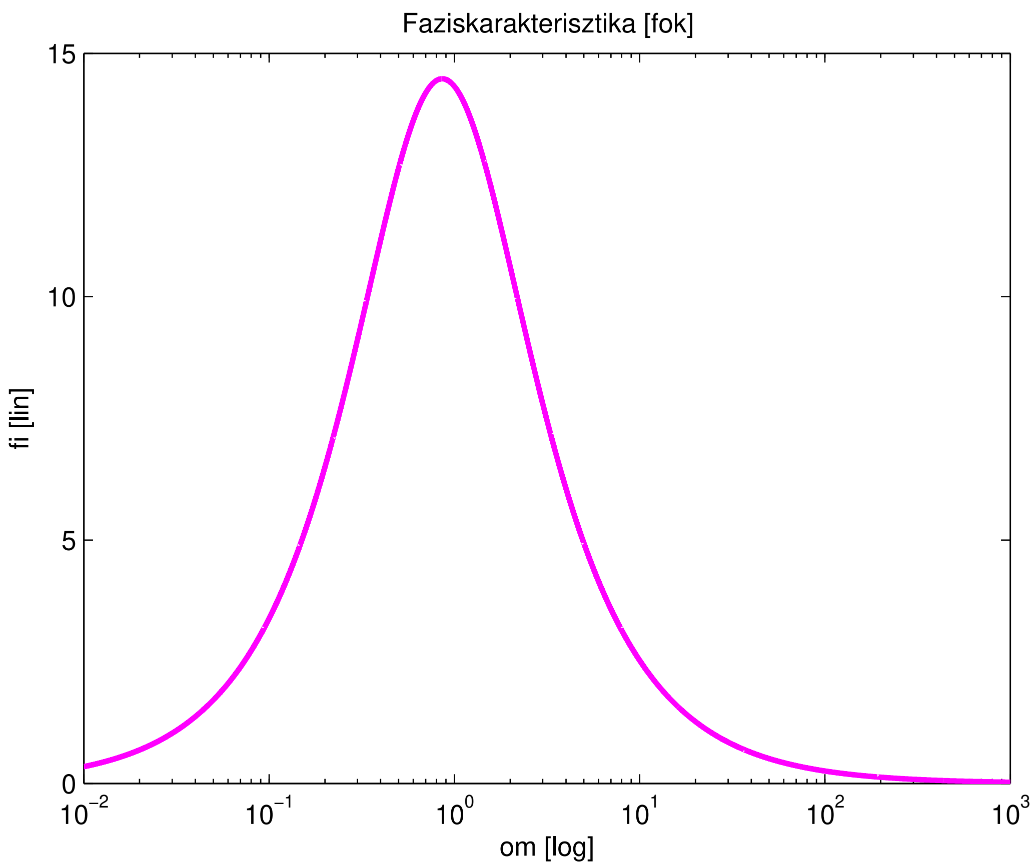
```
% p3.m

%% Szamitas
num = 2/3*[1 2/3];
den = [1 10/9];

om = logspace(-2,3,1e4);
numH = polyval(num, j*om);
denH = polyval(den, j*om);
H = numH ./ denH;
K = abs(H);
fi = angle(H);
fifok = fi*180/pi;

%% Abrazolas

figure;
semilogx(om, K, 'm-', 'LineWidth',2);
xlabel('om [log]');
ylabel('K [lin]');
title('Amplitudo karakterisztika');

%%
figure;
semilogx(om, fi, 'm-', 'LineWidth',2);
```

```
xlabel('om [log]');
ylabel('fi [lin]');
title('Faziskarakterisztika [radian]');

%%
figure;
semilogx(om, fifok, 'm-', 'LineWidth',2);
xlabel('om [log]');
ylabel('fi [lin]');
title('Faziskarakterisztika [fok]');

%% Osszehasonlitas a ket valasz kozott.
num2 = 2/3 * [1 0];
den2 = [1 10/9];
H2 = polyval(num2, j*om) ./ polyval(den2, j*om);
K2 = abs(H2);
fi2 = angle(H2);

%% Amplitudo karakterisztika
figure;
semilogx(om, K, 'm-', om, K2, 'r-', 'LineWidth',2);
xlabel('om [log]');
ylabel('K [lin]');
legend('U_R', 'U_L', 0);

%% Fazis karakterisztika
figure;
semilogx(om, fi, 'm-', om, fi2, 'LineWidth',2);
xlabel('om [log]');
ylabel('fi [lin]');
legend('U_R', 'U_L', 0);
title('Faziskarakterisztika [radian]');
```

Eredmények :




Faziskarakterisztika [radian]
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
fi [lin]
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
om [log]


Faziskarakterisztika [fok]
15
10
5
0
fi [lin]
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
om [log]

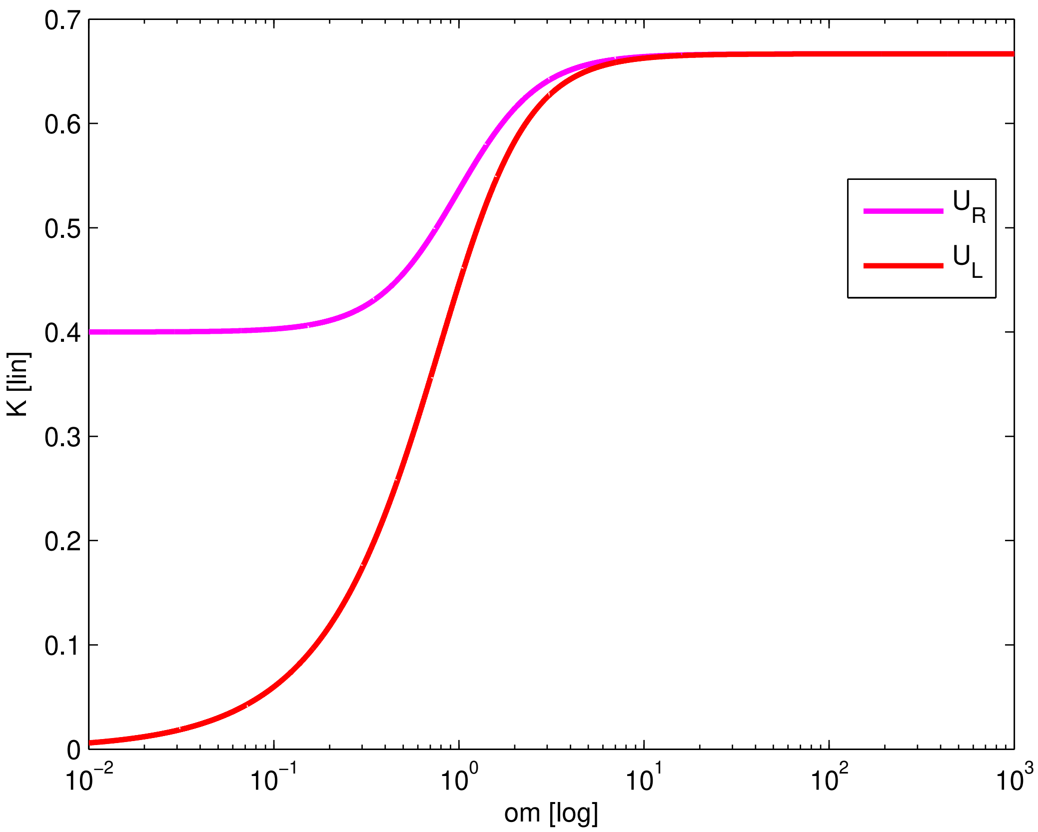
c. Használjuk fel az a. eredményét! Innen már csak feszültségosztás szükséges R és Z_L között.

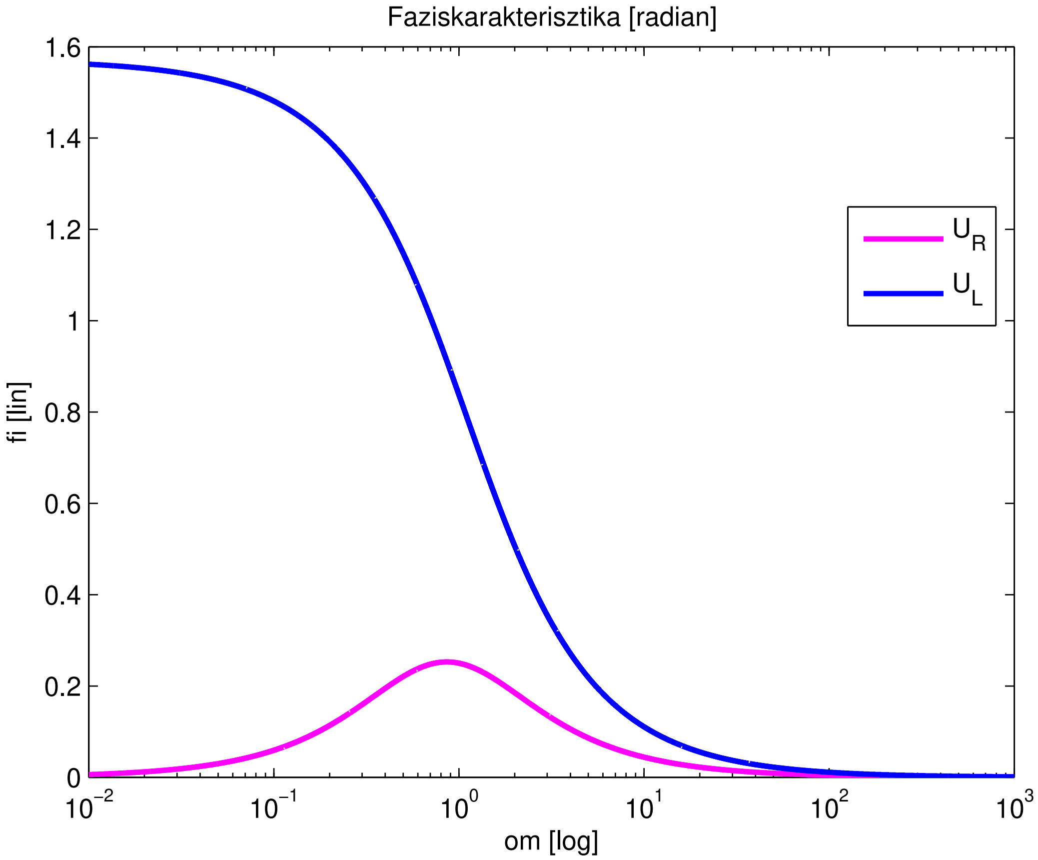
$$\overline{U}_L = \overline{U}_s \cdot \frac{Z_L}{R+Z_L} = \overline{U}_s \cdot \frac{2(R+Z_L)}{3Z_L+5R} \cdot \frac{Z_L}{R+Z_L} = \frac{j\omega 2L}{j\omega 3L+5R} = \frac{2}{3}\frac{j\omega}{j\omega+\frac{5R}{3L}}$$

A hálózat paramétereinek figyelembe vételével

$$H(j\omega) = \frac{2}{3} \cdot \frac{j\omega}{j\omega+10/9}$$

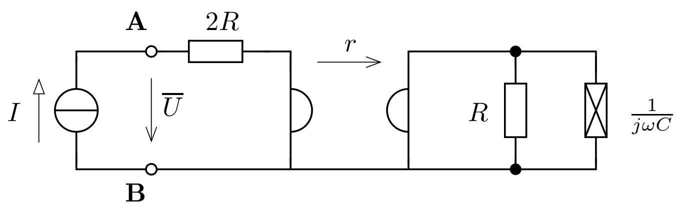
MATLAB-os ábrázolással hasonlítsuk össze az előző pontbeli eredményt az ittenivel.





3.4. A 2.4. feladat megoldása

Alkalmazzuk az áramforrással gerjesztést! Keresett mennyiség az U feszültség, ami alapján $Z_{AB} = \frac{U}{I}$.



Jelölje a girátor primer oldali áramát és feszültségét I_A és U_A, a szekunder oldali áramot és feszültséget pedig I_B és U_B. Ekkor az áramforrás árama megegyezik a girátor primer áramával ($I_A = I$). Felírható, hogy

$$\left.\begin{aligned} U_A &= -r \cdot I_B \\ U_B &= r \cdot I \\ I_B &= -\frac{U_B}{R \times Z_C} \\ U_A &= U - I \cdot 2R \end{aligned}\right\}$$

Rendezéssel adódik, hogy

$$-r \cdot \left(-\frac{r \cdot I}{R \times Z_C}\right) = U - I \cdot 2R \quad \Rightarrow \quad U = I \cdot \left(\frac{r^2}{R \times Z_C} + 2R\right)$$

Behelyettesítve a $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ összefüggést

$$U = I \cdot \frac{2R^2 Z_C + r^2 R + r^2 Z_C}{R \cdot Z_C} = I \cdot \frac{2R^2 \frac{1}{j\omega C} + r^2 R + r^2 \frac{1}{j\omega C}}{R \frac{1}{j\omega C}}$$

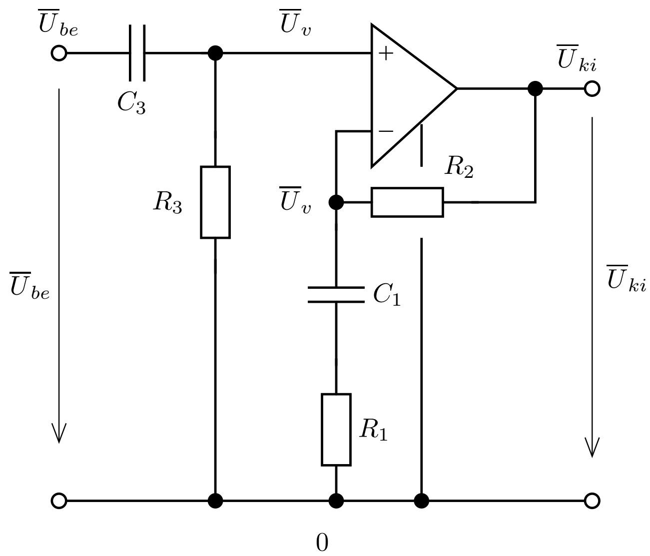
$$Z_{AB} = \frac{U}{I} = \frac{j\omega C r^2 R + (r^2 + 2R^2)}{R} = r^2 C \cdot \left(j\omega + \frac{2R^2 + r^2}{R} \right)$$

Megjegyzés : figyeljük meg, hogy a kondenzátorból a girátor felhasználásával induktív jellegű kétpólust kaptunk!

3.5. A 2.5. feladat megoldása

a.

Legyen az ismeretlen csomóponti potenciálok az alábbiak alapján



Az ideális műveleti erősítő bemeneti pólusaira felírható az alábbi két egyenlet :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{U}_v}{R_3} + \frac{\overline{U}_v - \overline{U}_{be}}{1/j\omega C_3} &= 0 \\ \frac{\overline{U}_v - \overline{U}_{ki}}{R_2} + \frac{\overline{U}_v}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Felhasználva, hogy $R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1+j\omega R_1 C_1}{j\omega C_1}$ adódik, hogy

$$\overline{U}_v + j\omega R_3 C_3 \overline{U}_v - j\omega R_3 C_3 \overline{U}_{be} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{U}_v = \frac{j\omega R_3 C_3}{1 + j\omega R_3 C_3} \overline{U}_{be}}$$

$$\overline{U}_v\,(1 + j\omega R_1 C_1) - \overline{U}_{ki}\,(1 + j\omega R_1 C_1) + j\omega R_2 C_1 \overline{U}_v = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{U}_v\,(1 + j\omega R_1 C_1 + j\omega R_2 C_1) = \overline{u}_{ki}\,(1 + j\omega R_2 C_1)$$

Innen behelyettesítéssel adódik

$$\overline{U}_{ki} = \frac{1 + j\omega C_1 (R_1 + R_2)}{1 + j\omega R_1 C_1} \cdot \frac{j\omega R_3 C_3}{1 + j\omega R_3 C_3} \cdot \overline{U}_{be}$$

$$H_u(j\omega) = \frac{(1 + j\omega C_1 (R_1 + R_2)) j\omega R_3 C_3}{(1 + j\omega R_1 C_1)(1 + j\omega R_3 C_3)} =$$

Megjegyzendő, hogy abban az esetben, ha $C_1(R_1 + R_2) = C_3 R_3$, akkor a rendszer elsőrendűvé válik és az átviteli karakterisztika alakja

$$H(j\omega) = \frac{j\omega R_3 C_3}{j\omega R_1 C_1 + 1} \qquad \text{lesz.}$$

b. Alkalmazva a hálózati paraméterek értékét

$$H(j\omega) = \frac{8(j\omega)^2 + 4j\omega}{4(j\omega)^2 + 5j\omega + 1}$$

Ennek ábrázolásához használjuk fel, hogy a MATLAB a polinomokat vektoros reprezentációban tárolja :

$$4(j\omega)^2 + 5j\omega + 1 \qquad \rightarrow \qquad \texttt{den = [8 4 1]}$$

Kihasználjuk továbbá, hogy a polinom kiértékelést végző `polyval` függvény egyszeri meghívásával az összes szükséges frekvencián (frekvencia pontokban) kiszámíthatjuk egy polinom értékét. A kiszámított polinom értékeket tartalmazó vektorokat elemenkénti műveletvégrehajtással adjuk össze a `./` művelettel.

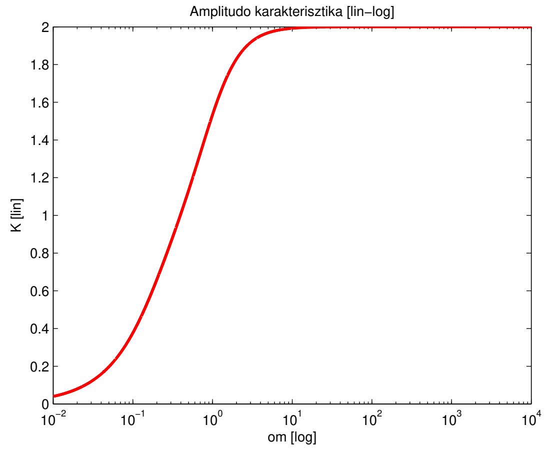
A számítást végző és ábrázoló szkriptet a mellékelt m-file tartalmazza.

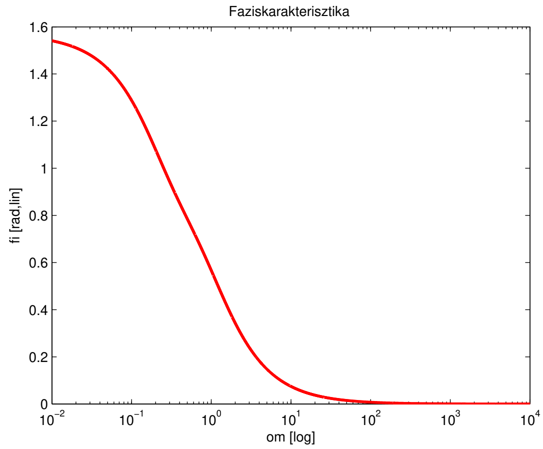
Listing 2. p5.m -

```
num = [8 4 0];
den = [4 5 1];
om = logspace(-2,4,1e4);
H = polyval(num, j*om) ./ polyval(den, j*om);
K = abs(H);
KdB = 20*log10(K);
fi = angle(H);
fifok = fi*180/pi;
%% abrazolas
% amplitudo karakterisztika
figure;
semilogx(om, K, 'r-','LineWidth',2);
xlabel('om [log]'); ylabel('K [lin]');
title('Amplitudo karakterisztika [lin-log]');

%% fazis karakterisztika
figure;
semilogx(om, fi, 'r-', 'LineWidth',2);
xlabel('om [log]'); ylabel('fi [rad,lin]');
title('Faziskarakterisztika ');

%% Bode-diagram (kulon abrakban)
figure;
subplot(211);
semilogx(om, KdB, 'r-', 'LineWidth',2);
xlabel('om [log]');
ylabel('K [dB]');
title('Amplitudo karakterisztika');
set(gca, 'XGrid','on', 'YGrid', 'on');

subplot(212);
semilogx(om, fifok, 'r-', 'LineWidth',2);
xlabel('om [log]');
ylabel('fi [fok]');
title('Fazis karakterisztika');
set(gca, 'XGrid','on', 'YGrid', 'on');


%% Nyquist-diagram
figure;
plot(real(H), imag(H), 'r-','LineWidth',2);
xlabel('Real');
ylabel('Imag');
title('Nyquist-diagram');
axis equal;

%% Linearis-logaritmikus abrazolas osszehasonlitas
figure;
subplot(211);
semilogx(om, K, 'r-', 'LineWidth', 2);
xlabel('om [log]');
ylabel('K [lin]');
title('Lin-log abrazolas');
subplot(212);
loglog(om, K, 'r-', 'LineWidth',2);
xlabel('om [log]');
ylabel('K [log]');
title('Log-log abrazolas');
```

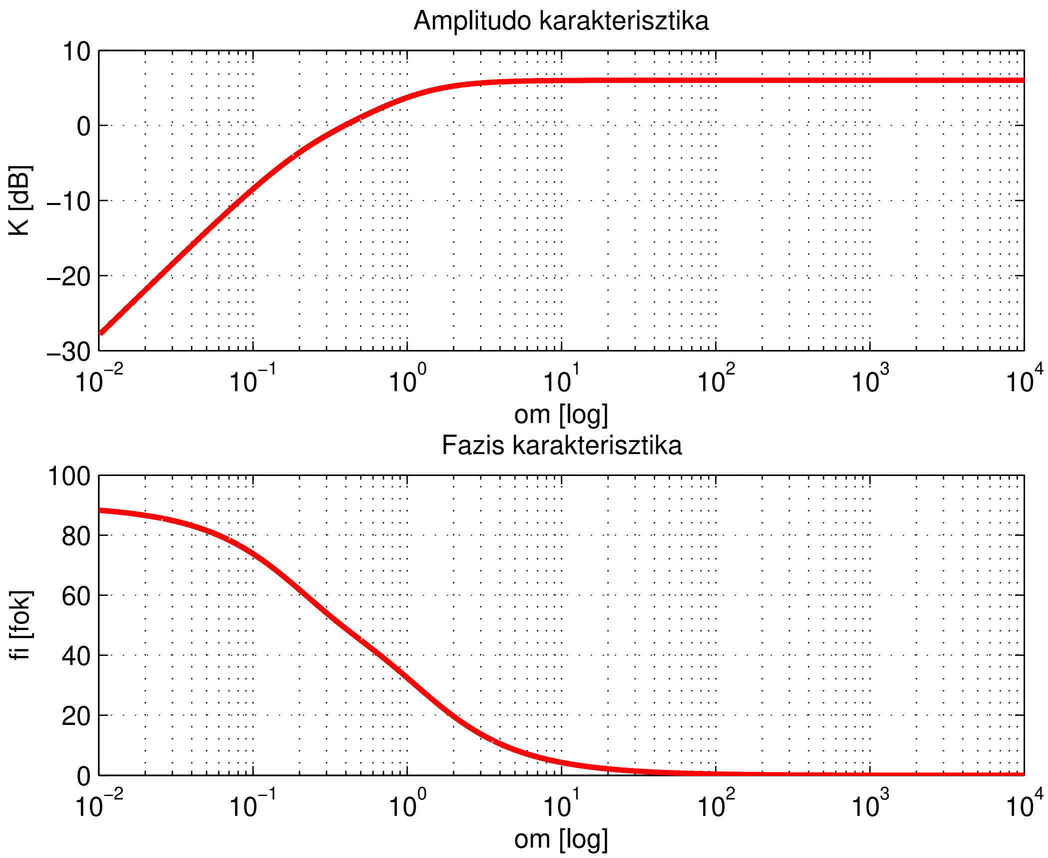
Eredményeket az alábbi ábrák mutatják (figyeljük meg az amplitúdó karakterisztika ábrázolásánál a lineáris és a logaritmikus skála hatását!)

Amplitúdókarakterisztika és fáziskarakterisztika :

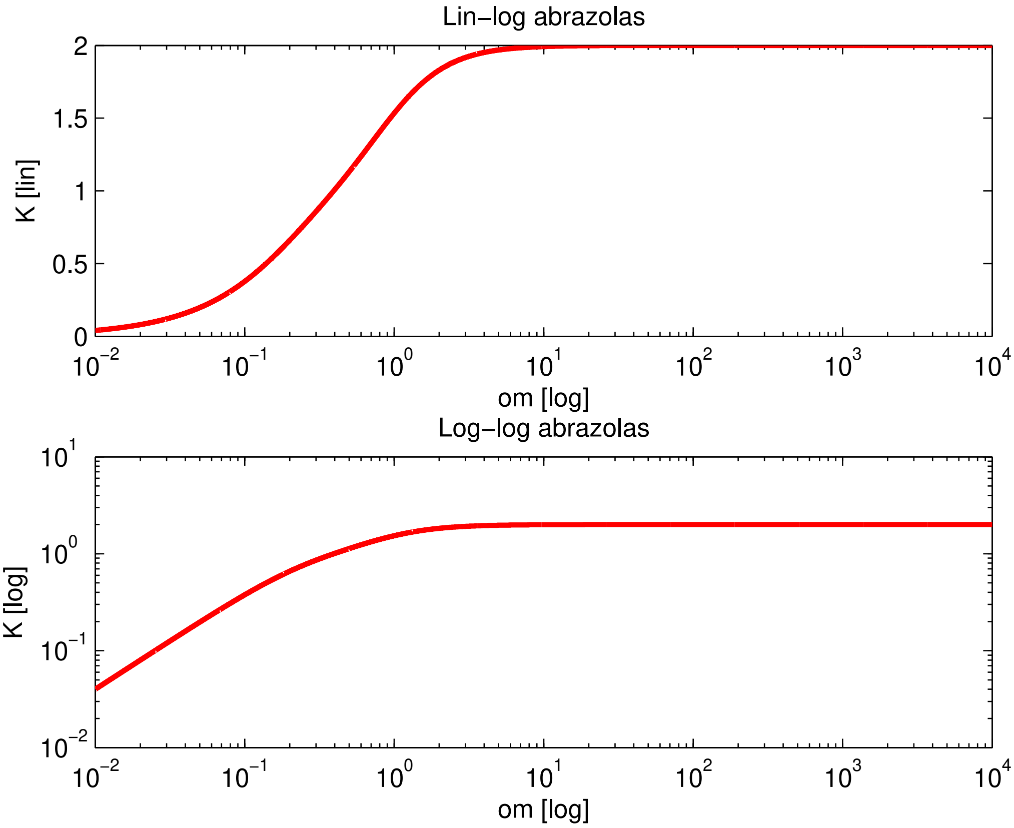




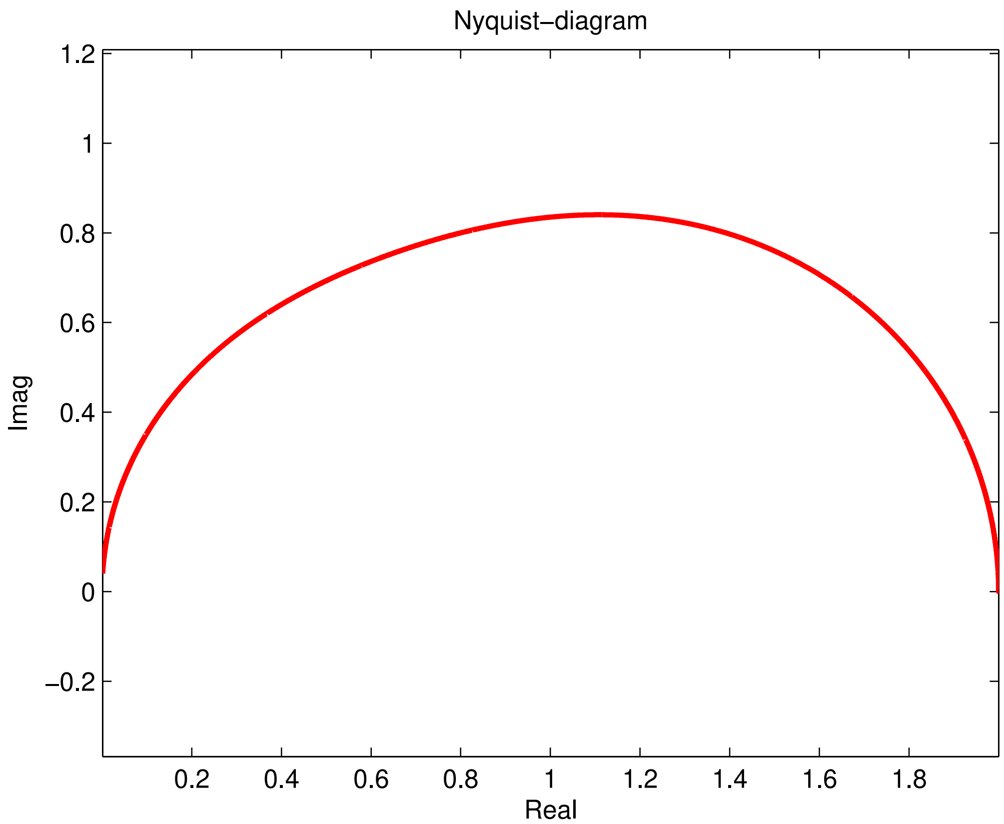
Bode-diagram (a klasszikus formájában) :



Lineáris és logaritmikus skálán történő ábrázolás :



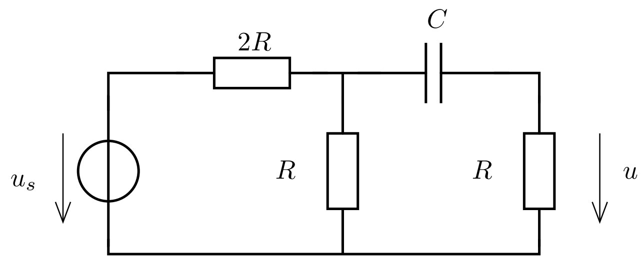
Nyquist-diagram :


Nyquist−diagram
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
Imag
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
Real

4. Feladatok

4.1.

Tekintsük az alábbi hálózatot, amelynél a feszültségforrás feszültsége a gerjesztés, a jelölt feszültség a válasz.



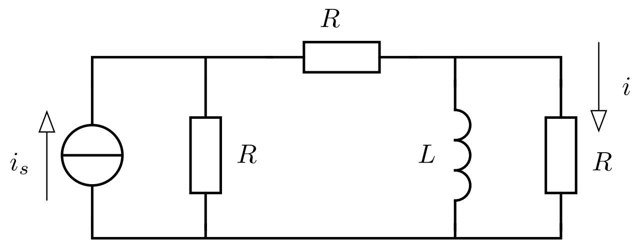
- Számítsuk ki az átviteli karakterisztikát!
- Legyen $R = 3$ kΩ és $C = 500$ nF. Számítsuk ki a válasz időfüggvényét, ha a gerjesztés

$$u_s(t) = [2\cos(\omega_1 t) + 3\cos(\omega_2 t + 0{,}1)]\,V$$

  ahol $\omega_1 = 4$ krad/s, $\omega_2 = 10$ krad/s.
- Határozzuk meg a bejelölt R ellenálláson disszipálódó teljes teljesítményt!
- Határozzuk meg az $\omega \to 0$ (DC) és az $\omega \to \infty$ (HF) határhelyzetekben az átviteli tényező értékét az átviteli karakterisztika illetve a hálózat alapján!

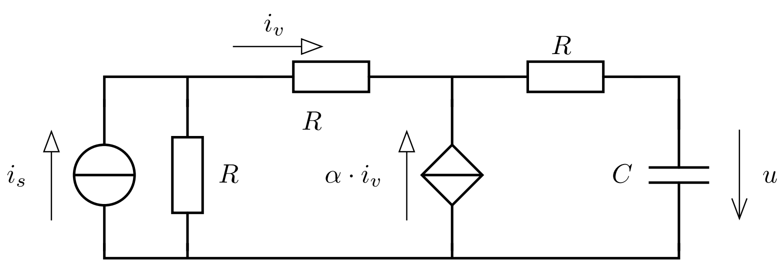
4.2.

Határozzuk meg az átviteli karakterisztikát illetve oldjuk meg az előbbi feladat utolsó pontját az alábbi hálózat esetében!



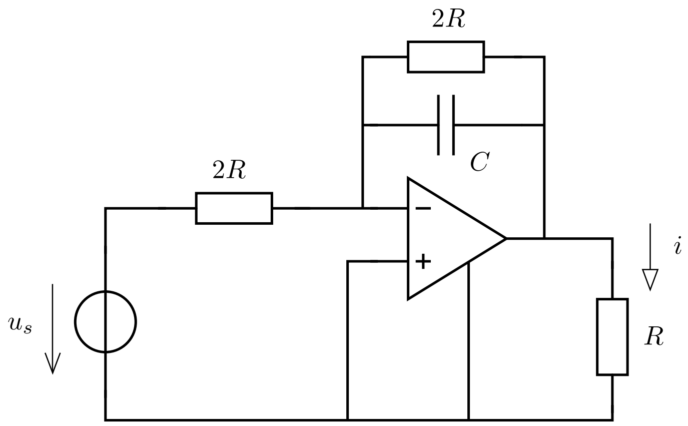
4.3.

Oldjuk meg az előbbi feladat kérdéseit ezen hálózatra!



4.4.

Oldjuk meg az előbbi feladat kérdéseit ezen hálózatra!

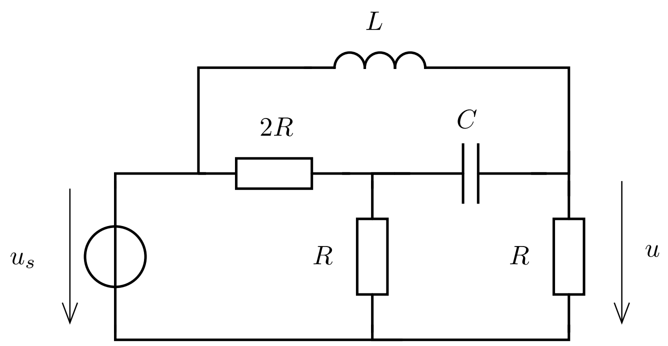


4.5.

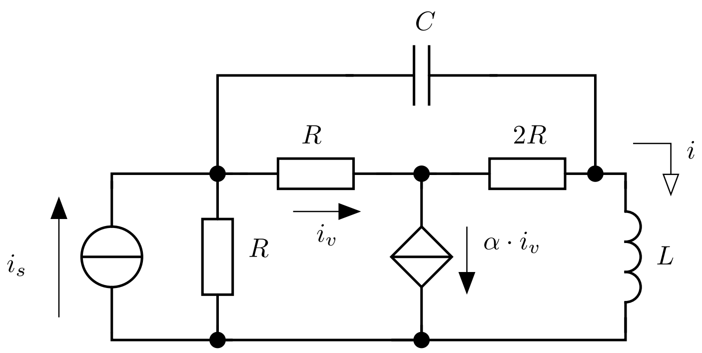
Számítsuk ki az alábbi esetekben az átviteli karakterisztikát!

Ne felejtsük, hogy az átviteli karakterisztikát valamilyen rendezett alakra hozni, célszerűen $(j\omega)$-ban polinom / polinom alakra!

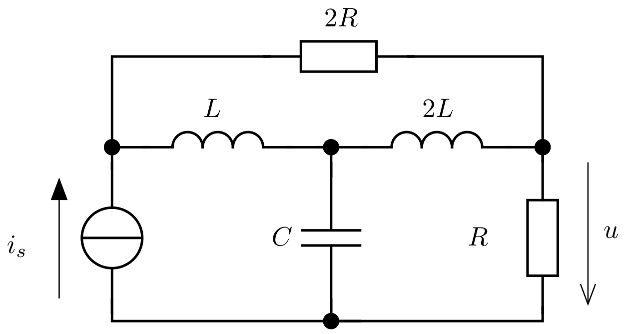
1. Gerjesztés : feszültségforrás feszültsége, válasz : az R ellenállás u feszültsége



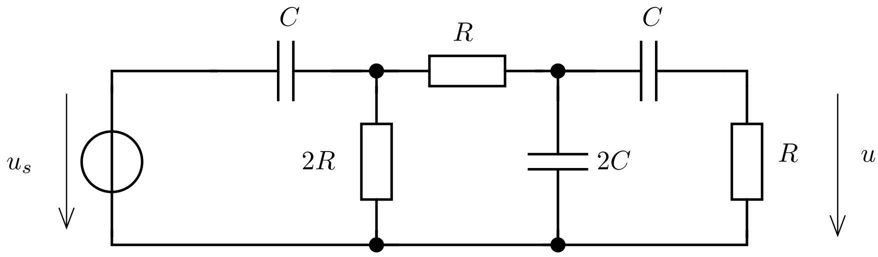
2. Gerjesztés : áramforrás árama, válasz : a tekercs i árama



3. Gerjesztés : áramforrás árama, válasz : az R ellenállás u feszültsége



4. Gerjesztés : feszültségforrás feszültsége, válasz : az R ellenállás u feszültsége



5. Gerjesztés : áramforrás árama, válasz : u feszültség