Nanoelektronikai Szimulációs Laboratórium

Periodikus jelek Fourier-sora

Reichardt, András

2020. május 22.

Figyelmeztetés

Komplex Fourier-együtthatók kiszámítása

A pontos (végtelen sok elemet tartalmazó) Fourier-felbontás :

$$u(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} U_p^C e^{jp\omega_0 t}$$

Véges közelítés (négyzetes hibát minimalizáló) :

$$u_N(t) = \sum_{p=-N}^{N} U_p^C e^{jp\omega_0 t}$$

A komplex együtthatók kiszámítása (p-dik)

$$U_p^C = \frac{1}{T} \int_{(T)} u(t) e^{-jp\omega_0 t} dt$$

ahol $\omega_0 = 2\pi/T$ az alapkörfrekvencia, p a módus index (amelyhez tartozó frekvencia $p \cdot \omega_0$), az integrálást egy teljes periódusra kell elvégezni (integráljel alatti (T) jelentése)

Komplex együtthatók tulajdonságai

Az $x(t)$ jel tisztán valós értékű (csak valós értékek alkotják)

- $2 \cdot N + 1$ általában komplex értékű együttható
- p-dik együttható a $p \cdot \omega_0$ frekvencia hatásának erősségét (súlyát) adja meg
- p és $-p$ együtthatók ($p\omega_0$ és $-p\omega_0$ frekvenciák súlya) összefügg

$$U_{-p}^C = \left(U_p^C\right)^\star \text{ azaz } U_p^C = U_p e^{j\varrho_p}$$

mert visszaállításkor

$$u(t) = U_0 + \sum_{p=-N}^{-1} U_p^C e^{jp\omega_0 t} + \sum_{p=1}^{N} U_p^C e^{jp\omega_0 t}$$

$$= U_0 + \sum_{p=1}^{N} \left(U_{-p}^C e^{-jp\omega_0 t} + U_p^C e^{jp\omega_0 t}\right) = U_0 + \sum_{p=1}^{N} 2U_p \cos(p\omega_0 t + \varrho_p)$$

- ha U_p^C-k tisztán valósak, akkor $x(t)$ páros (szimmetrikus) az időben
- ha U_p^C/k tisztán képzetesek, akkor $x(t)$ páratlan (anti-szimmetrikus) az időben

Mérnöki valós alak

$$u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{N} \hat{U}_p \cdot \cos(p\omega_0 t + \varrho_p)$$

ahol $\hat{U}_p$ a p-dik módus valós csúcsértéke, ϱ_p a kezdőfázisa.

- A szinuszos hálózatok válaszának számítása során alkalmazott alak.
- A valós csúcsérték pozitív, a kezdőfázis $-\pi \leq \varrho_p \leq \pi$ vagy $-180^\circ \leq \varrho_p < 180^\circ$

Matematikai alak

$$u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{N} \left\{ U_p^A \cdot \cos(p\omega_0 t) + U_p^B \sin(p\omega_0 t) \right\}$$

ahol U_0 az egyszerű középérték, az együtthatók kiszámítása

$$U_0 = \frac{1}{T} \int u(t) dt$$

$$U_p^A = \frac{2}{T} \int u(t) \cos(p\omega_0 t) dt; \quad U_p^B = \frac{2}{T} \int u(t) \sin(p\omega_0 t) dt$$

- időben páros jel esetében $U_p^B = 0$
- időben páratlan jel esetében $U_0 = 0$ és $U_p^A = 0$
- $u(t) = u_s(t) + u_a(t)$ alakú ($u_s(t)$ időben páros jel, $u_a(t)$ időben páratlan) esetben a két jel együtthatói külön-külön jelennek meg az együtthatók komplex alakjában

Komplexből mérnöki valós

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C e^{jp\omega_0 t}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{p=1}^{N} \hat{X}_p \cdot \cos(p\omega_0 t + \varrho_p)$$

ahol

- $X_0 = X_0^C$ a 0-dik együttható,
- $\hat{X}_p = 2 \cdot |X_p^C|$ a valós csúcsérték,
- $\varrho_p = \mathrm{arc} X_p^C$ a kezdőfázis.

Komplexből matematikai alak

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C e^{jp\omega_0 t} \quad \rightarrow x(t) = X_0 + \sum_{p=1}^{N} \left[X_p^A \cos(p\omega_0 t) + X_p^B \sin(p\omega_0 t) \right]$$

A matematikai alakban az együtthatók

$$X_p^A = \frac{2}{T} \int_{(T)} x(t) \cos(p\omega_0 t) dt = 2\mathrm{Re}\left\{ X_p^C \right\}$$

$$X_p^B = \frac{2}{T} \int_{(T)} x(t) \sin(p\omega_0 t) dt = -2\mathrm{Im}\left\{ X_p^C \right\}$$

A zérus frekvenciához tartozó együttható

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) dt = X_0^C$$

Linearitás

A Fourier-sorfejtés lineáris tulajdonságú, ezért a szuperpozíció elve érvényesül.

Linearitási tétel

Ha

$$x(t) \rightarrow X_p^C \text{ és } y(t) \rightarrow Y_p^C$$

akkor

$$z(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t) \rightarrow Z_p^C = \alpha \cdot X_p^C + \beta \cdot Y_p^C$$

Bizonyítás

$$Z_p^C = \frac{1}{T} \int_{(T)} z(t) e^{-jp\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{(T)} (\alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t)) e^{-jp\omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{(T)} \alpha \cdot x(t) e^{-jp\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{(T)} \beta \cdot y(t) e^{-jp\omega_0 t} dt =$$

$$= \alpha \cdot X_p^C + \beta \cdot Y_p^C$$

Időbeli eltolás

Toljuk el a jelet az időben T_0-val. Hogyan befolyásolja ez az együtthatókat?

$$x(t) \quad \rightarrow \quad X_p^C \text{ és } y(t) = x(t - T_0) \quad \rightarrow \quad Y_p^C$$

$$Y_p^C = \frac{1}{T}\int_{(T)} y(t)e^{-jp\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t-T_0)e^{-jp\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t-T_0)e^{-jp\omega_0 (t-T_0+T_0)}dt = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t-T_0)e^{-jp\omega_0 (t-T_0)}e^{-jp\omega_0 T_0}dt$$

$$= e^{-jp\omega_0 T_0} \cdot \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t-T_0)e^{-jp\omega_0 (t-T_0)}dt = e^{-jp\omega_0 T_0}\frac{1}{T}\int_{(T)} x(\xi)e^{-jp\omega_0 \xi}d\xi$$

$$\boxed{Y_p^C = e^{-jp\omega_0 T_0} \cdot X_p^C}$$

$$|Y_p^C| = \left|e^{-jp\omega_0 T_0} \cdot X_p^C\right| = |X_p^C|; \qquad \text{arc } Y_p^C = \text{arc } X_p^C - jp\omega_0 T_0$$

Deriválási tétel

Vizsgáljuk meg a deriválás hatását az együtthatókra!

$$x(t) \quad \rightarrow \quad X_p^C \text{ és } y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \quad \rightarrow \quad Y_p^C$$

$$Y_p^C = \frac{1}{T}\int_{(T)} \frac{dx}{dt} e^{-jp\omega_0 t} dt$$

Parciális integrálással oldhatjuk meg :

$$\int_a^b u'v dt = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b uv' dt$$

Most $u' = \frac{d}{dt}x$ ezért $u = x$, valamint $v = e^{-jp\omega_0 t}$ ezért $v' = -jp\omega_0 e^{-jp\omega_0 t}$.

$$Y_p^C = \left[x(t) \cdot e^{-jp\omega_0 t}\right]_0^T - \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t) \cdot (-jp\omega_0) e^{-jp\omega_0 t} dt$$

Az első tag zérus ha $x(t)$ deriváltja létezik, mert akkor egy T periódusu függvény a kiértékelendő kifejezés.

Deriválási tétel - folyt.

A második tag :

$$-\frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)(-jp\omega_0)e^{-jp\omega_0 t}dt = jp\omega_0\frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)e^{-jp\omega_0 t}dt = jp\omega_0 X_p^C$$

ami alapján

$$Y_p^C = jp\omega_0 \cdot X_p^C$$

A deriválás frekvenciával való szorzást hoz az együtthatókba.

Ablakozás

Háttér

Ablakozásnak nevezhetjük azt a műveletet, amikor egy időtartománybeli jelet egy másik jellel összeszorozva, az időtartomány valamely részén engedélyezzük illetve nullázzuk.
Legyen az $f(t)$ jel, amelyet a $-T_0 \dots T_0$ tartományon "átengedünk", a többi időben nem engedélyezünk (ekkor az eredő jel értéke zérus) lesz.

$$x(t) = f(t) \cdot w(t), \text{ ahol } w(t) = \varepsilon(t + T_0) - \varepsilon(t - T_0)$$

Hogyan változik meg ezáltal az eredeti jel együtthatói?

Feladat megfogalmazása

Általánosan fogalmazva, határozzuk meg a $f(t)$ és $w(t)$ jelek együtthatóinak ismeretében az

$$x(t) = f(t) \cdot w(t)$$

szorzatfüggvény együtthatóit!

Szorzatfüggvény

$$X_p^C = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\cdot w(t)e^{-jp\omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\left(\sum_{m=-N}^{N} W_m^C e^{jm\omega_0 t}\right)e^{-jp\omega_0 t}dt =$$

$$= \sum_{m=-N}^{N} W_m^C \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)e^{jm\omega_0 t}e^{-jp\omega_0 t}dt =$$

$$= \sum_{m=-N}^{N} W_m^C \left\{\frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)e^{-j(p-m)\omega_0 t}\right\}dt =$$

$$= \sum_{m=-N}^{N} W_m^C \cdot F_{p-m}^C$$

A szorzatfüggvény Fourier-együtthatói az együtthatók konvolúciójaként adódik.

Módusok speciális elnevezése

Néhány módusnak speciális neve van :

1. $p = 0$, egyen összetevő vagy DC-összetevő, megegyezik a jel egyszerű középértékével
2. $p = 1$, azaz $\omega = \omega_0$: alapfrekvenciájú összetevő (vagy alapharmonikus)
3. $p = 2$, azaz $\omega = 2\omega_0$: első felharmonikus
4. $p = 3$, azaz $\omega = 3\omega_0$: második felharmonikus
5. $p > 1$, azaz $\omega = p \cdot \omega_0$: (p-1)-dik felharmonikus

Effektív érték értelmezése

Tekintsük az $u(t)$ feszültséget, amely egy egységnyi ellenálláson esik. Határozzuk meg az ellenálláson hővé alakuló teljesítmény átlagát hosszú időre tekintve!

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = u(t) \cdot \frac{u(t)}{R} = \frac{u(t)^2}{R}$$

A feszültség periodikus (T periódussal) időbeli változású, a hosszú idő pedig $M \cdot T$ időt jelent (M nagy egész szám).

$$E = \int_0^{T_{end}} p(t)dt = \int_0^{m \cdot T} \frac{u(t)^2}{R} dt$$

Az időátlag pedig

$$\frac{E}{m \cdot T} = \frac{1}{m \cdot T} \int_{(m \cdot T)} u(t)^2 \frac{1}{R} dt = \frac{1}{R} \frac{1}{m \cdot T} \int_{(m \cdot T)} u(t)^2 dt$$

Innen egyetlen periódusra kifejezve

$$P = \frac{E}{T} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{T} \int_{(T)} u(t)^2 dt$$

Effektív érték értelmezése

Vezessük be azt az egyenfeszültséget, amely ugyanennyi "átlagteljesítményt" ad T-re vonatkozóan.

$$P = \frac{1}{R} \cdot U_{\text{eff}}^2$$

Egyenlővé téve a két utóbbi kifejezést

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_{(T)} u(t)^2 dt$$

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} u(t)^2 dt}$$

- effektív érték pozitív
- $U_{\text{eff}} \geq U_0$

Fourier-sorfejtés effektív értéke

Legyen $u(t)$ Fourier-sorával (pl. mérnöki valós alakkal) adott

$$u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{N} \hat{U}_p \cdot \cos(p\omega_0 t + \varrho_p)$$

Ennek effektív értéke

$$\boxed{U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} \hat{U}_p^2} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2}\left(\hat{U}_1^2 + \hat{U}_2^2 + \ldots\right)}}$$

Az integrálandó kifejezés egyes részei :

$$u(t)^2 = \left(U_0 + \sum_{p=1}^{N} \hat{U}_p \cos(p\omega_0 t + \varrho_p)\right)^2 =$$

$$= U_0^2 + 2 \cdot U_0 \cdot \sum_{p=1}^{N} \hat{U}_p \cos(p\omega_0 t + \varrho_p) + \left(\sum_{p=1}^{N} \hat{U}_p \cos(p\omega_0 t + \varrho_p)\right)^2$$

Bizonyítás

Az első tag integrálja könnyen adódik : $\displaystyle\int_{(T)} U_0^2 dt = U_0^2 \cdot T$

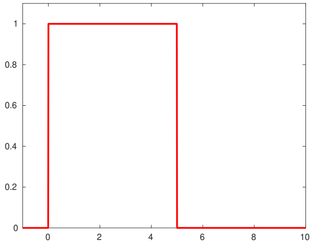
A második tag integrálja

$$\int_{(T)} 2U_0\hat{U}_p \cos(p\omega_0 t + \varrho_p)dt = 2U_0\hat{U}_p \cdot \int_{(T)} \cos(p\omega_0 t + \varrho_p)dt = 0$$

mert egész számú teljes periódusát integráljuk a cos függvénynek.
Az utolsó tag esetében a koszinusz függvények közötti merőlegességet használjuk ki

$$\int_{(T)} \cos(m\omega_0 t + \varrho_m)\cos(n\omega_0 t + \varrho_n)dt = \delta_{m,n} \cdot \frac{1}{2}T$$

$$\text{ahol } \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{ha } m = n \\ 0 & \text{ha } m \neq n \end{cases} \text{ a Kronecker-delta.}$$



Tekintsük az 50%-os kitöltöttségű négyszögjelet! Egy periódusának időfüggvénye

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 < t < T/2 \\ 0 & \text{ha } T/2 < t < T \end{cases}$$

Határozzuk meg a Fourier-sorfejtés együtthatóit!

Egyenösszetevő

$$U_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 1 \cdot dt = \frac{1}{2}$$

Általános komponens

$$U_p^C = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)e^{-jp\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 1 \cdot e^{-jp\omega_0 t}dt$$

$$U_p^C = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 1 \cdot e^{-jp\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-jp\omega_0 t}}{-jp\omega_0}\right]_0^{T/2} = \frac{1}{T}\,\frac{e^{-jp\omega_0 T/2} - 1}{-jp\omega_0}$$

$$= \frac{1}{jp\omega_0 T}\left(1 - e^{-jp\omega_0 T/2}\right) =$$

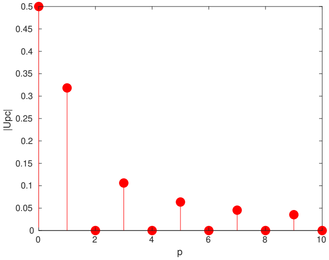
$$\omega_0 \cdot \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2} = \pi; \qquad \omega_0 T = \frac{2\pi}{T} T = 2\pi$$

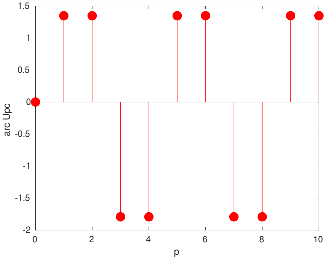
$$U_p^C = \frac{1}{p\pi}\,\frac{1 - e^{-jp\pi}}{2j} = \frac{1}{p\pi} e^{-jp\pi/2} \cdot \frac{e^{jp\frac{\pi}{2}} - e^{-jp\frac{\pi}{2}}}{2j} = \frac{1}{p\pi} e^{-jp\pi/2} \sin\left(p\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{végül :} \quad \boxed{U_p^C = \frac{1}{2} e^{-jp\pi/2} \frac{\sin(p\pi/2)}{p\pi/2}}$$

$$\text{amplitúdó spektrum :} \quad \boxed{|U_p^C| = \frac{|\sin(p\pi/2)|}{p\pi}}$$

Eredmény diszkusszió





Az amplitúdónak vannak zéruspontjai :

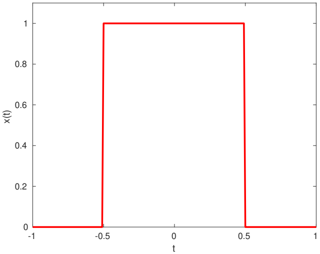
$$\sin(p\pi/2) = 0 \qquad \rightarrow \qquad p\frac{\pi}{2} = m \cdot \pi$$

$$p_m = m \cdot 2 \qquad \text{ahol } m = 1, 2, 3, \ldots$$

A fázist az $e^{-jp\pi/2}$ fázisa befolyásolja

$$\text{arc } U_p^C = \text{arc } sin(p\pi/2) - \frac{\pi}{2}$$

Eltolt négyszögjel



Toljuk el a jelet úgy, hogy szimmetrikus legyen az időben!

$$x(t) = \varepsilon(t + T/4) - \varepsilon(t - T/4) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{ha } -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$U_p^C = \frac{1}{T} \int_{(T)} u(t) e^{-jp\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} 1 \cdot e^{-jp\omega_0 t} dt$$

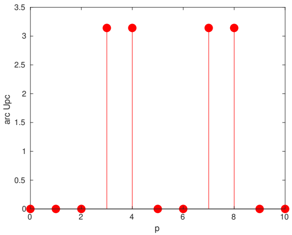
$$= \frac{1}{T} \cdot \left[\frac{e^{-jp\omega_0 t}}{-jp\omega_0} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{1}{T} \cdot \frac{e^{jp\omega_0 T/4} - e^{-jp\omega_0 T/4}}{jp\omega_0} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(p\omega_0 T/4)}{p\omega_0 T/4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(p\pi/2)}{p\pi/2}$$

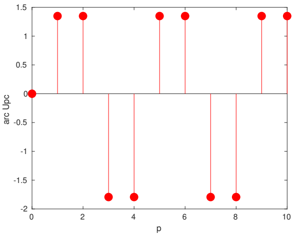
Másképpen is lehet! Az előző példát eltoltuk időben visszafelé $T/4$-vel. Ezért az előző eredményt szorozzuk $e^{-jp\omega_0(-T/4)} = e^{jp\pi/2}$-vel!

$$e^{jp\omega_0\frac{T}{4}} \cdot \frac{1}{2}e^{-jp\pi/2}\frac{\sin(p\pi/2)}{p\pi/2} = \frac{1}{2}\frac{\sin(p\pi/2)}{p\pi/2}$$

Amplitúdó spektrum nem változik az előzőhöz képest, mert $|e^{-jp\pi/2}| = 1$ volt korábban is.
Az időben szimmetrikusság miatt az együtthatók tisztán valósak!



Együtthatók fázisa ebben a példában



Együtthatók fázisa az előző feladatban

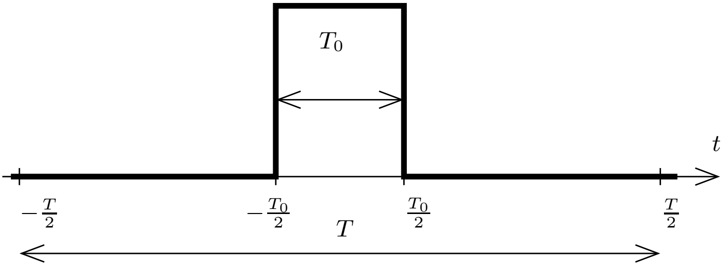
A fázis spektrumon látszik, hogy az értéke 0 vagy π, attól függően, hogy a sin éppen pozitív vagy negatív értékű.

Általános négyszögjel

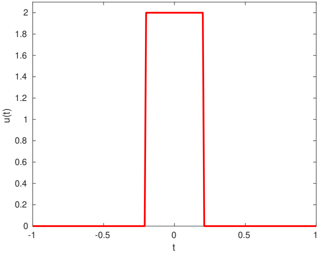
Vizsgáljuk meg az általános négyszögjel spektrumát!
A T_0 szélességű impulzus található az időben szimmetrikusan elhelyezve!

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A jelölés alapján adódik, hogy $T = n \cdot T_0$.



A sorfejtés tetszőleges tagja (p bármi):



$T = 2$, $T_0 = T/5$ paraméterű négyszögjel

Egy periódus leírása az időtartományban :

$$u(t) = \hat{U}\left\{\varepsilon\left(t - \frac{T_0}{2}\right) - \varepsilon\left(t + \frac{T_0}{2}\right)\right\}$$

ahol $T = n \cdot T_0$.

$$U_p^C = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)e^{-jp\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \hat{U}e^{-jp\omega_0 t}dt =$$

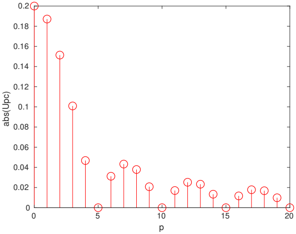
$$= \frac{1}{T}\hat{U}\left[\frac{e^{-jp\omega_0 t}}{-jp\omega_0}\right]_{-T_0/2}^{T_0/2} =$$

$$= \frac{\hat{U}}{T} \cdot \frac{T}{p\pi} \cdot \frac{e^{jp\omega_0 T_0/2} - e^{-jp\omega_0 T_0/2}}{2j}$$

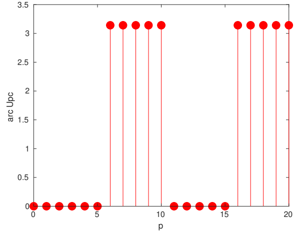
$$U_p^C = \frac{\hat{U}}{p\pi} \cdot \sin\left(p\frac{\omega_0 T_0}{2}\right);$$

$$\frac{\omega_0 T_0}{2} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T_0}{2} = \pi \cdot \frac{T_0}{T} = \frac{\pi}{n}$$

$$\boxed{U_p^C = \frac{\hat{U}}{n} \cdot \frac{\sin\left(p\frac{\pi}{n}\right)}{p\frac{\pi}{n}}}$$



Amplitúdó spektruma



Fázis spektruma

- $$\boxed{U_p^C = \frac{\hat{U}}{n} \cdot \frac{\sin\left(p\frac{\pi}{n}\right)}{p\frac{\pi}{n}}}$$
- tisztán valós értékű együtthatók
- zérus értékű együtthatók *"helye"* (indexe)

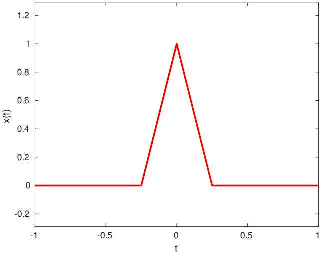
  $$\sin\left(p\frac{\pi}{n}\right) = 0 \quad \frac{p\pi}{n} = m \cdot \pi \Rightarrow p_m = m \cdot n$$

  most $n = 5$ ezért $p_m = 5m$.
- amplitúdó spektrum :

  $$|U_p^C| = \frac{\hat{U}}{n} \cdot |sin(p\pi/n)|$$
- fázisspektrum : (ugrál π és 0 között)

  $$\varrho_p = \begin{cases} 0 & \text{ha } \sin(p\pi/n) > 0 \\ \pi & \text{ha } \sin(p\pi/n) < 0 \end{cases}$$

Tekintsük az alábbi háromszög jellegű impulzust! Határozzuk meg a Fourier-sorfejtés együtthatóit!



Egyetlen periódusa

$$u(t) = \begin{cases} A + \frac{A}{T_0/2}t & \text{ha } -\frac{T_0}{2} < t < 0 \\ A - \frac{A}{T_0/2}t & \text{ha } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

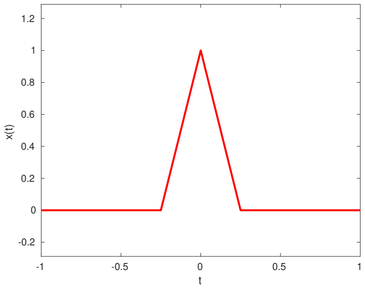
Az együtthatók meghatározására természetesen a brute-force módon is lehetőség van a definíciós integrál alapján!

$$U_p^C = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)e^{-jp\omega_0 t}dt =$$

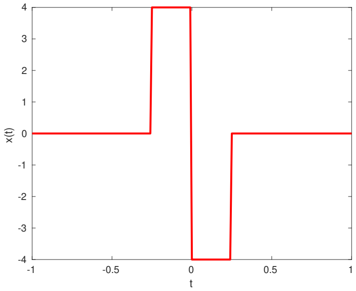
$$= \frac{1}{T}\left\{\int_{-T_0/2}^{0}\left(A + \frac{2A}{T_0}t\right)e^{-jp\omega_0 t}dt + \int_{0}^{T_0/2}\left(A - \frac{2A}{T_0}t\right)e^{-jp\omega_0 t}dt\right\}$$

Trükkös megoldás

A fenti integrál kiértékelése sok hibát rejt magában. Célszerű valami "trükkös" megoldás felé fordulni!
Használjuk fel a derivált tételt! A háromszög impulzus deriváltja az alábbi, szakaszonként állandó függvény lesz :



$f(t)$



$g(t)$

ahol

$$g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

A derivált tétel értelmében, ekkor

$$G_p^C = jp\omega_0 \cdot F_p^C$$

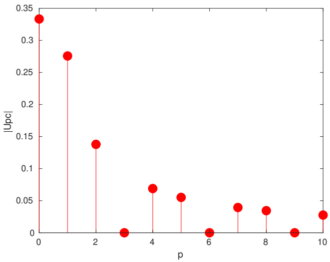
Ehhez vezessük be az előző feladatban vizsgált általános négyszögimpulzust!

$$r(t, T0) = \varepsilon(t + T_0/2) - \varepsilon(t - T_0/2)$$

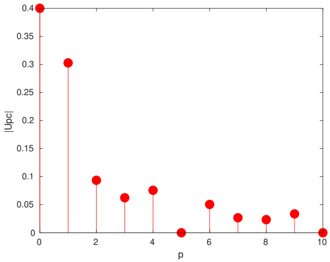
Ennek Fourier-együtthatói ($T = n \cdot T_0$ alkalmazásával)

$$R_p^C(T_0) = R_p^C(n) = \frac{1}{T/T_0} \cdot \frac{\sin(p\pi/(T/T_0))}{p\pi/(T/T_0)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin(p\pi/n)}{p\pi/n}$$

$|R_p^C(3)|$



$|R_p^C(2.5)|$



Az impulzusfüggvény segítségével a deriváltjel :

$$g(t) = \frac{2A}{T_0} \cdot r\left(t + \frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{2}\right) + \frac{-2A}{T_0} \cdot r\left(t - \frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{2}\right)$$

Az eltolási tételt is alkalmazva :

$$G_p^C = \frac{2A}{T_0} \cdot e^{jp\omega_0 T_0/4} \cdot R_p^C(2n) + \frac{-2A}{T_0} \cdot e^{-jp\omega_0 T_0/4} \cdot R_p^C(2n) =$$

$$= \frac{2A}{T_0} \cdot R_p^C(2n) \cdot \left(e^{jp\omega_0 T_0/4} - e^{-jp\omega_0 T_0/4}\right) = \frac{2A}{T_0} \cdot 2j \sin\left(p\frac{\pi}{2n}\right) \cdot R_p^C(2n)$$

A keresett együtthatók a derivált tétel alapján

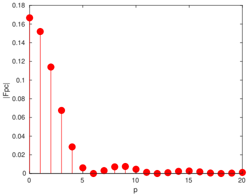
$$F_p^C = \frac{G_p^C}{jp\omega_0} = \frac{1}{jp2\pi/T} \cdot \frac{4A}{T_0} \cdot j \cdot \frac{\sin(\pi/2n)}{p\pi} = A \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sin\left(p\frac{\pi}{2n}\right)^2}{\left(\frac{p\pi}{2n}\right)^2}$$

- Az együtthatók valósak, ami jó, mert a háromszög alakú impulzus az időben páros volt.
- A fázismenet mindenhol 0.

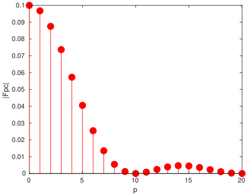
Néhány háromszög impulzus amplitúdó spektruma

$$f(t) = \begin{cases} A + \frac{2A}{T_0}t & -\frac{T_0}{2} < t < 0 \\ A - \frac{2A}{T_0}t & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

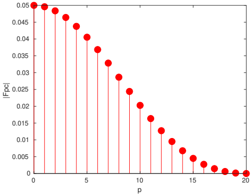
$n = 3,\ T = 3 \cdot T_0$



$n = 5,\ T = 5 \cdot T_0$



$n = 10,\ T = 3 \cdot T_0$



$$F_p^C = A \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sin\left(p\frac{\pi}{2n}\right)^2}{\left(\frac{p\pi}{2n}\right)^2}$$

Számítsuk ki a korábban (25. oldal) sorfejtett általános kitöltésű jel effektív értékét! A definíciós integrálból induluink ki

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)^2 dt} = U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}T_0} = \sqrt{\frac{T_0}{T}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Tegyük fel, hogy a tetszőleges kitöltésű négyszögjel egyszerű középértéke $2V$. Mekkora legyen a T_0/T arány és mekkora a négyszögjel magas értéke ($\hat{U}$), ha az effektív értéke 3,3 V?

$$U_{\text{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{n}} = 3{,}3V \quad \text{és} \quad U_0 = \frac{1}{T}\hat{U}\cdot T_0 = \hat{U}\frac{1}{n} = 2V$$

Innen

$$\sqrt{n} = \frac{3{,}3}{2} \rightarrow n = \left(\frac{3{,}3}{2}\right)^2 = 2{,}7225; \hat{U} = \sqrt{n}\cdot 3{,}3V = 5{,}445V$$

$$\text{azaz} \quad \boxed{\hat{U} = 5{,}445V; \quad \frac{T_0}{T} = \frac{1}{2{,}7225} = 0{,}367}$$

Szinuszos jel

Számítsuk ki a tiszta szinuszos feszültség effektív értékét!

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} \left(\hat{U}\cdot\cos(p\omega_0 t)\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}^2\cdot\cos^2(p\omega_0 t)dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2p\omega_0 t)\right)dt} = \sqrt{\frac{\hat{U}^2}{T}\left(\int_0^T \frac{1}{2}dt + \int_0^T \frac{1}{2}\cos(2p\omega_0 t)dt\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{U}^2}{T}\left(\frac{T}{2}+0\right)} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

Kétoldalasan egyenirányított szinusz

Mekkora a kétoldalasan (abszolútértéket képező módon) egyenirányított szinuszos jel esetében az effektív érték?
Megegyezik az előző feladatban kapott eredménnyel, mert a négyzetre emelés után a nem különbözik az abszolútértékképzéssel és az anélküli jel esete.

Féloldalasan egyenirányított szinuszos jel

Féloldalasan egyenirányított jel esetében a negatív értékű esetben 0 lesz a jel értéke. (Általában pl. egyetlen diódával megvalósított egyenirányítás)

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (\hat{U}\sin(\omega_0 t))^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{\hat{U}^2}{2}} \frac{1-\cos(2\omega_0 t)}{2} dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{U}^2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} dt} = \hat{U}\cdot\sqrt{\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{T}{2}} = \frac{\hat{U}}{2}$$