MŰEGYETEM 1782
Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék
Antennák és EMC kutatócsoport
NES Laboratórium

Kétkapu karakterisztika meghatározás

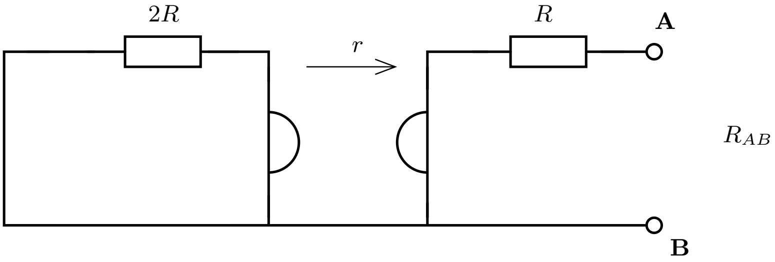
JR1 2023. tavasz. 5.hét

NES

reichardt.andras@vik.bme.hu

Reichardt András | 2023. március 27.

Határozzuk meg az A-B bemeneti ellenállást a hálózatban!

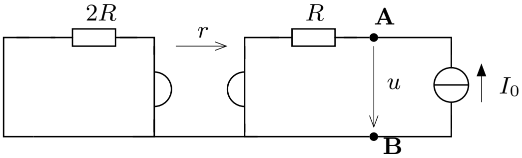


$r = 2\ k\Omega$, $R = 10k\ \Omega$.

Megoldás :

A girátor karakterisztikája : $u_a = -r \cdot i_b; u_b = r \cdot i_a$

Szekunder kétpólus felé mutat a giráció nyila (iránya)!



Áramforással gerjesztve, az A és B közötti feszültséget mérjük. Ellenállás :

$$R_{AB} = \frac{u}{I_0}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_a}{2R} + i_a &= 0 \\ i_b + \frac{u_b - u}{R} &= 0 \\ u_a &= -r \cdot i_b \\ u_b &= r \cdot i_a \\ i_b &= I_0 \end{aligned}\right\}$$

$$u_a = -r \cdot (I_0)$$

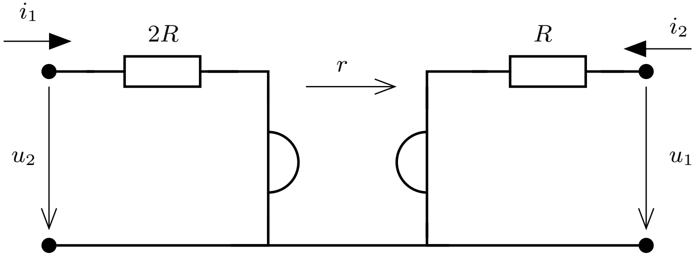
$$u_a + 2 \cdot R i_a = 0; \Rightarrow i_a = -\frac{u_a}{2R} = -\frac{-r}{2R} I_0$$

$$u_b = r \cdot \frac{r}{2R} I_0$$

$$R \cdot i_b + u_b - u = 0; \Rightarrow u = R \cdot I_0 + \frac{r^2}{2R} I_0$$

$$\boxed{R_{AB} = \frac{u}{I_0} = \left(R + \frac{r^2}{2R}\right) = \frac{2R^2 + r^2}{2R}}$$

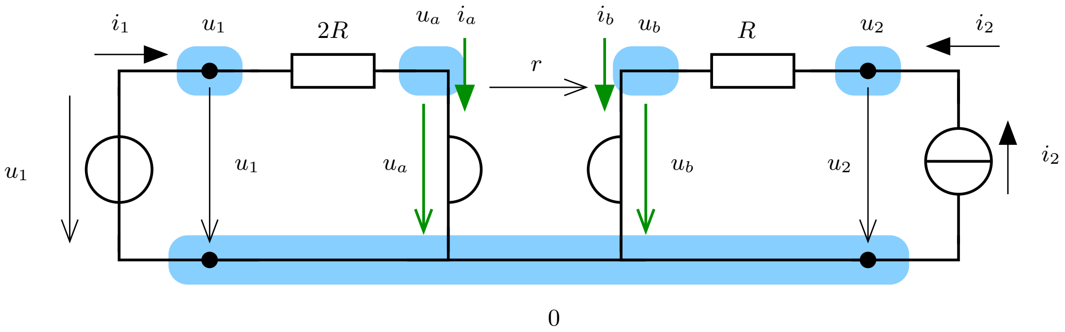
Az előző feladat megoldása után, határozzuk meg az alábbi kétkapu inverz hibrid karakterisztikáját! ($r = 2\ k\Omega$, $R = 10k\ \Omega$).



inverz hibrid karakterisztika :

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= K_{11} \cdot u_1 + K_{12} \cdot i_2 \\ u_2 &= K_{21} \cdot u_1 + K_{22} \cdot i_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

A karaktterisztikának megfelelően, a primer és szekunder oldalt is lezárjuk a megfelelő forrással.



Megoldás 2.

felírható egyenletek (4 csomóponti, 2 karakterisztika) :

$$\left.\begin{aligned}
-i_1 + \frac{u_1 - u_a}{2R} &= 0\\
\frac{u_a - u_1}{2R} + i_a &= 0\\
i_b + \frac{u_b - u_2}{R} &= 0\\
-i_2 + \frac{u_2 - u_b}{R} &= 0\\
u_a &= -r \cdot i_b\\
u_b &= r \cdot i_a
\end{aligned}\right\}$$

"kézzel" történő megoldás esetében :

$$-i_1 + i_a = 0 \text{ és } -i_2 + i_b = 0$$

felhasználható (az 1. és 3. egyenlet helyett)

$$\left.\begin{aligned}
-2R \cdot i_1 + u_1 - u_a &= 0\\
R \cdot i_2 + r \cdot i_1 - u_2 &= 0\\
u_a &= -r \cdot i_2\\
u_b &= r \cdot i_1
\end{aligned}\right\}$$

innen

$$\left.\begin{aligned}
-2R \cdot i_1 + u_1 - (-r \cdot i_2) &= 0\\
R \cdot i_2 + r \cdot i_1 - u_2 &= 0
\end{aligned}\right\}$$

$$i_1 = \frac{1}{2R} \cdot u_1 + \frac{r}{2R} \cdot i_1$$

$$u_2 = Ri_1 + r \cdot i_1 = \frac{r}{2R} u_2 + i_2 \cdot \left(\frac{r^2}{2R} + R\right)$$

Karakterisztika :

$$\boxed{\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2R} & \dfrac{r}{2R} \\[2ex] \dfrac{r}{2R} & \dfrac{r^2 + 2R^2}{2R} \end{pmatrix}}$$

Az ismeretlenek (általánosan) : $i_1, u_2, u_a, i_a, u_b, i_b$
források : u_1, i_2

$$\begin{pmatrix} 2R & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 2R & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & R \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & r \\ \cdot & \cdot & \cdot & -r & 1 & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \\ u_a \\ i_a \\ u_b \\ i_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & R \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2R & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 2R & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & R \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & r \\ \cdot & \cdot & \cdot & -r & 1 & \cdot \end{pmatrix} ; \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & R \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Megoldandó egyenlet :

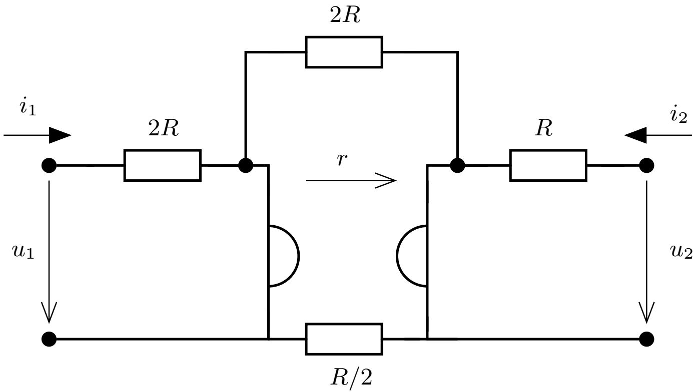
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{s}$$

aminek megoldása

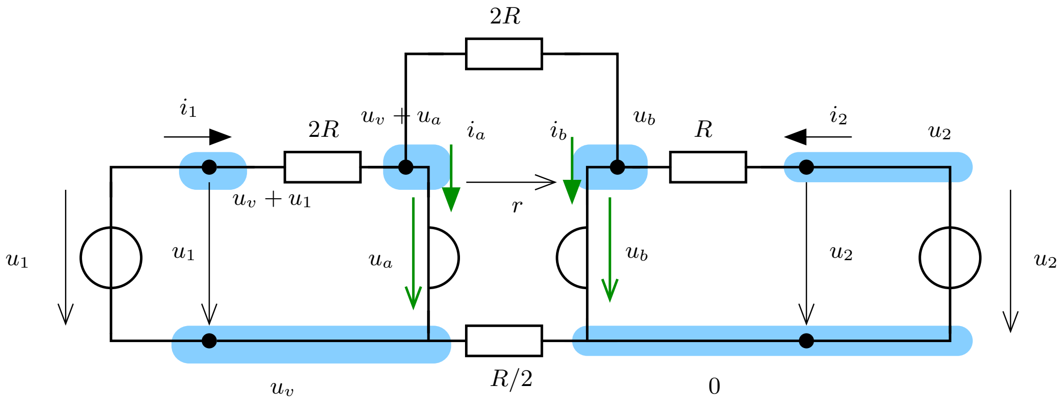
$$\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{Q}$$

Ennek első két sora tartalmazza a keresett karakterisztika mátrixának együtthatóit.

Az előző feladat megoldása után, határozzuk meg az alábbi kétkapu admittancia karakterisztikáját! ($r = 2\ k\Omega$, $R = 10k\ \Omega$).



Lezárjuk a primer és szekunder oldalt a kiszámítandó karakterisztikának megfelelően és az alábbi csomóponti potenciálokat vesszük fel!



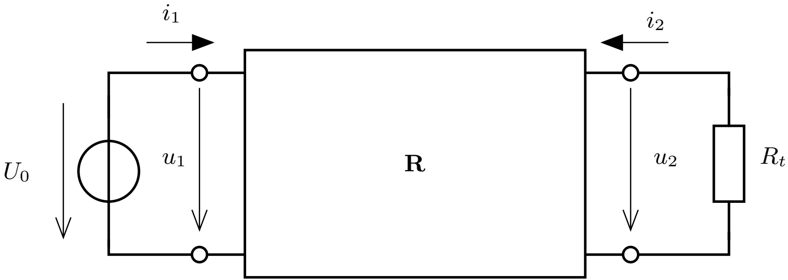
ismeretlenek : $i_1, i_2, u_a, i_a, u_b, i_b, u_v$

források : u_1, u_2

$$\left.\begin{aligned}
-i_1 + \frac{(u_v + u_1) - (u_v + u_a)}{2R} &= 0 \\
-i_2 + \frac{u_{-}u_b}{R} &= 0 \\
\frac{(u_v + u_a) - (u_v + u_1)}{2R} + \frac{u_v + u_a - u_b}{2R} + i_a &= 0 \\
i_b + \frac{u_b - (u_v + u_a)}{2R} + \frac{u_b - u_2}{R} &= 0 \\
\frac{u_v}{R/2} + \frac{u_2 - u_b}{R} &= 0 \\
u_a &= -r \cdot i_b \\
u_b &= r \cdot i_a
\end{aligned}\right\}
\mathbf{P} = \begin{pmatrix}
2R & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & R & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 2 & 2R & -1 & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & -1 & \cdot & 3 & 2R & -1 \\
R & \cdot & \cdot & -R & \cdot & \cdot & 2 \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & r & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -r & 1 & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}
1 & \cdot \\
\cdot & 1 \\
1 & \cdot \\
\cdot & 2 \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot
\end{pmatrix}$$

Az előző feladat megoldása után, határozzuk meg az alábbi kétkapu inverz hibrid karakterisztikáját! ($r = 2\ k\Omega$, $R = 10k\ \Omega$).



ahol

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 20 & 2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \cdot k\Omega$$

$U_0 = 20V$ és $R_t = 10k\Omega$

4 ismeretlen : u_1, i_1, u_2, i_2

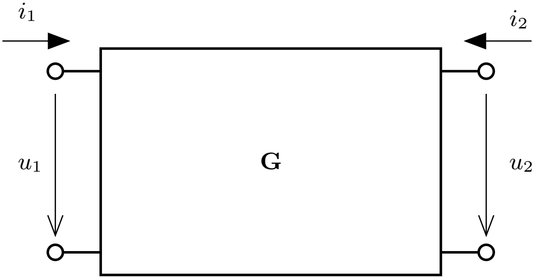
$$\left.\begin{aligned} u_1 &= U_0 \\ u_2 &= -i_2 \cdot R_t \\ u_1 &= R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_2 \\ u_2 &= R_{21} \cdot i_1 + R_{22} \cdot i_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & R_t \\ 1 & -R_{11} & \cdot & -R_{12} \\ \cdot & -R_{21} & 1 & -R_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \\ u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Ennek megoldásaként adódik, hogy

$$u_1 = 20V; \quad i_1 = 0.9431 \text{ mA} ; \quad u_2 = -0.9434V; \quad i_2 = 0.0943mA$$

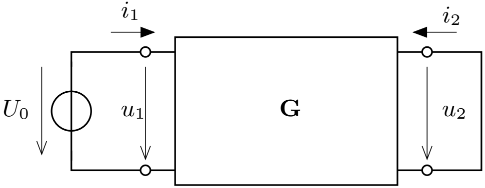
Tekintsük az alábbi kétkaput, amely admittancia-karakterisztikával adott $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 20 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ mS .

Vizsgáljuk meg reciprocitás és szimmetria szempontjából!



Oldjuk meg a feladatot $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ mS esetére is!

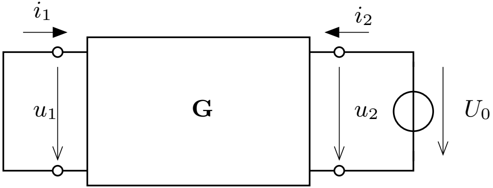
Az $u_2 = 0$ rövidzárat jelent! Legyen $U_0 = 10V$!



$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= 0 \\ i_1 &= G_{11} \cdot u_1 + G_{12} \cdot u_2 \\ i_2 &= G_{21} \cdot u_1 + G_{22} \cdot u_2 \end{aligned}\right\}$$

$U_1 = 10V; I_1 = 200mA; U_2 = 0V; \boxed{I_2 = 20mA}$

Felcserélve a lezárásokat, adódik



$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= 0 \\ i_1 &= G_{11} \cdot u_1 + G_{12} \cdot u_2 \\ i_2 &= G_{21} \cdot u_1 + G_{22} \cdot u_2 \end{aligned}\right\}$$

$U_1 = 0V; \boxed{I_1 = 20mA}; U_2 = 10V; I_2 = 100mA$

A rövidzár (terhelés) oldali áramok azonosak, ezért reciprok a kétkapu. A gerjesztés oldali áramok azonban különbözőek, ezért nem szimmetrikus a kétkapu!

Az előzőek alapján kiszámítva két elrendezést, az alábbi eredmények adódnak :

1. elrendezés :

$$u_1 = 10V; \boxed{\boxed{i_1 = 200mA}}; u_2 = 0V; \boxed{i_2 = 20mA}$$

2. elrendezés :

$$u_1 = 0V; \boxed{i_1 = 20mA}; u_2 = 10V; \boxed{\boxed{i_2 = 200mA}}$$

Ebben az esetben a gerjesztés oldali áramok is megegyeznek, ezért nemcsak reciprok, hanem szimmetrikus is a kétkapu!

Megjegyzendő, hogy az analitkikus megoldás

$$\text{a. : } i_{1a} = G_{11} \cdot U_0; i_{2a} = G_{12} \cdot U_0$$

$$\text{b. : } i_{1b} = G_{21} \cdot U_0; i_{2b} = G_{22} \cdot U_0$$

Reciprocitás : $i_{2a} = i_{1b}$ alapján $G_{12} = G_{21}$

Szimmetria : $i_{1a} = i_{2b}$ alapján $G_{11} = G_{22}$ adódik.

Mutassuk meg, a hibrid karakterisztika és az impedancia karakterisztika közötti átjárási lehetőséget! Milyen következtetések vonhatóak le a reciprocitás és szimmetrikusság feltételére?

Megoldás

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R_{11}\cdot i_1 + R_{12}\cdot i_2 \\ u_2 &= R_{21}\cdot i_1 + R_{22}\cdot i_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} u_1 &= H_{11}\cdot i_1 + H_{12}\cdot u_2 \\ i_2 &= H_{21}\cdot i_1 + H_{22}\cdot u_2 \end{aligned}\right\}$$

$$i_2 = H_{21}\cdot i_1 + H_{22}\cdot u_2 \Rightarrow u_2 = -\frac{H_{21}}{H_{22}}\cdot i_1 + \frac{1}{H_{22}} i_2$$

$$u_1 = H_{11}\cdot i_1 + H_{12}\left(-\frac{H_{21}}{H_{22}}\cdot i_1 + \frac{1}{H_{22}} i_2\right) = i_1\cdot\left(H_{11} - \frac{H_{21}H_{12}}{H_{22}}\right) + i_2\cdot\frac{H_{12}}{H_{22}}$$

$$\text{Ami alapján : } \boxed{R_{11} = \frac{H_{11}\cdot H_{22} - H_{12}\cdot H_{21}}{H_{22}}; R_{12} = \frac{H_{12}}{H_{22}}; R_{21} = -\frac{H_{21}}{H_{22}}; R_{22} = \frac{1}{H_{22}}}$$

$$\text{Reciprocitás : } R_{12} = R_{21} \Rightarrow \frac{H_{12}}{H_{22}} = -\frac{H_{21}}{H_{22}} \Rightarrow \boxed{H_{12} = -H_{21}}$$

$$\text{Szimmetrikusság : } R_{11} = R_{22} \Rightarrow \boxed{H_{11}\cdot H_{22} - H_{12}\cdot H_{22} = 1}$$