

Jelek és rendszerek 1. 2024. tavasz
gyakorló feladatok a Thévenin és Norton helyettesítés témakörből

reichardt.andras@vik.bme.hu
NES

2024. március 16.

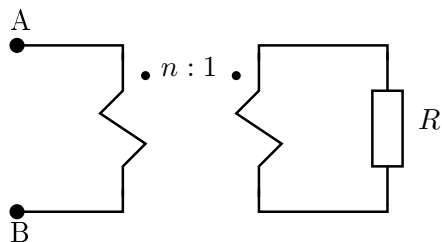
1. Példák a bemeneti ellenállás meghatározására

A bemeneti ellenállás meghatározását visszavezetjük hálózati probléma megoldására. A kétpólus két pólusát egy áramforrással zárjuk le, ezzel egy hálózati problémát kapunk. Itt az A-B közötti feszültséget határozzuk meg! Ennek ismeretében

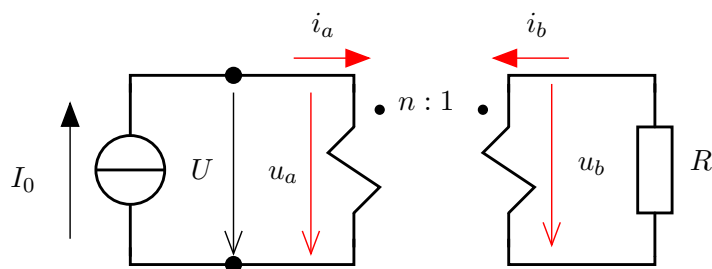
$$R_{be} = \frac{U}{I_0}$$

módon számítható ki. A módszer akkor is működik, ha feszültségforrást kapcsolunk a két pólus közé. Ekkor a keresett mennyiség az A-B kétpólus árama.

1. : Határozzuk meg az alábbi kétpólus bemeneti ellenállását!



Megoldás [1] : Jelöljük a csatolt kétpólusok feszültségét és áramát!



Egyenletek az ideális transzformátor (IT) mindkét kétpólusának felső csomópontjára :

$$-I_0 + i_a = 0 \quad \text{és} \quad \frac{u_b}{R} + i_b = 0$$

valamint az IT karakterisztikája alapján

$$u_a = n \cdot u_b \quad \text{és} \quad i_b = -n \cdot i_a$$

Az összekapcsolási kényszerek alapján adódik, hogy a keresett U mennyiségre

$$U = u_a$$

Ezek alapján

$$U = u_a = n \cdot u_b = n \cdot (-R \cdot i_b) = n \cdot R \cdot (-1) \cdot (-n \cdot i_a)$$

$$U = n^2 \cdot R \cdot I_0$$

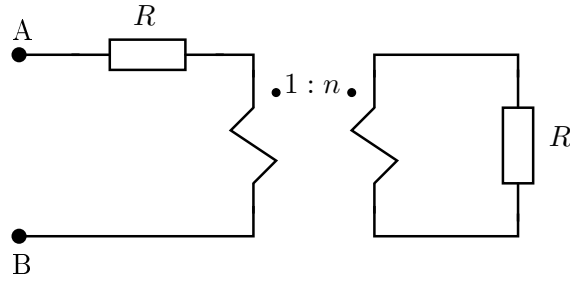
A bemeneti ellenállás

$$R_{\text{be}} = \frac{U}{I_0} = n^2 \cdot R$$

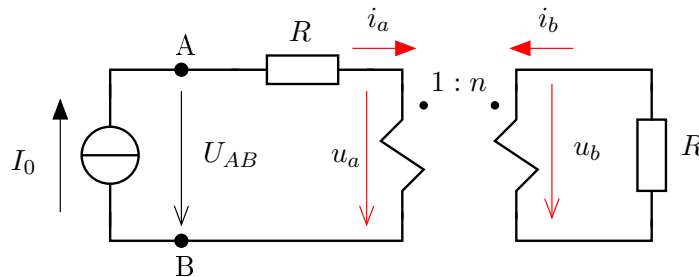
Megjegyzés : Ha a primer és szekunder kétpólusokat felcseréljük ($n : 1$ helyett $1 : n$), akkor a kapott eredményünk

$$R_{\text{be}} = \frac{R}{n^2} \quad (1)$$

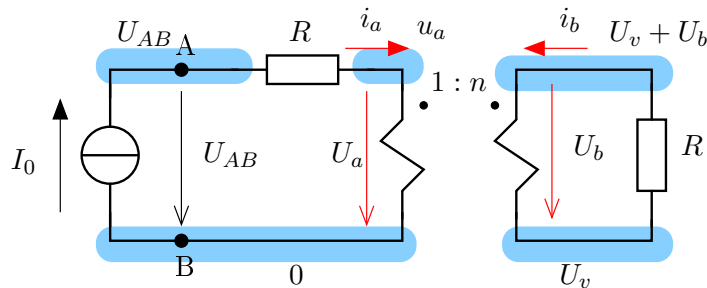
2. : Határozzuk meg az alábbi kétpólus bemeneti ellenállását!



Megoldás [2/1] : Oldjuk meg a szokásos módon (lezárás forrással és hálózatszámítási problémaként tekintve az A-B feszültséget meghatározzuk)



A csatolt kétpólusok azonosítása után alkalmazhatunk csomóponti potenciálokat! Ehhez vegyük fel az alábbi módon a potenciálokat! Megjegyzendő, hogy az U_v potenciált nem tudjuk meghatározni, de a teljesség kedvéért fel kell venni!



Lényegében csak három csomópontra lehet egyenletet felírni!

$$\left. \begin{aligned} -I_0 + \frac{U_{AB} - U_A}{R} &= 0 \\ i_a - I_0 &= 0 \\ U_b + i_b \cdot R &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Emellett a csatolt kétpólus karakterisztikája is szükséges :

$$\left. \begin{aligned} U_a &= n \cdot U_b \\ i_b &= -n \cdot i_a \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ezután az (2) és (3) alapján U_{AB} is kifejezhető I_0 függvényeként :

$$\begin{aligned} U_{AB} = U_a + R \cdot i_a &= n \cdot U_b + R \cdot I_0 = n \cdot (-R \cdot i_b) + R \cdot I_0 = \\ &= n \cdot (-R \cdot (-n \cdot I_0)) + R \cdot I_0 = R \cdot (n^2 + 1) \cdot I_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Ahonnán

$$R_{AB} = R \cdot (n^2 + 1)$$

adódik.

Megoldás [2/2] : **Másik megoldás** is elképzelhető. Az eredő ellenállás kiszámításához a kapcsolást mint a *klasszikus* eredő ellenállás esetén! Visszafelé haladva kell számolnunk! Az IT baloldalára kell "visszaszámítani" a lezáró R ellenállást (megoldását lásd következő példában) : ◀

$$R_e = \frac{R}{n^2}$$

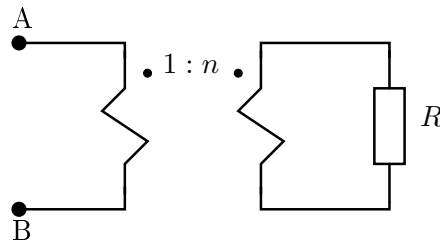
Ezután a baloldali R ellenállással sorba van kapcsolva az IT bemenete felől látott eredő ellenállás. Ezért

$$R_{AB} = R + n^2 \cdot R = R \cdot (n^2 + 1)$$

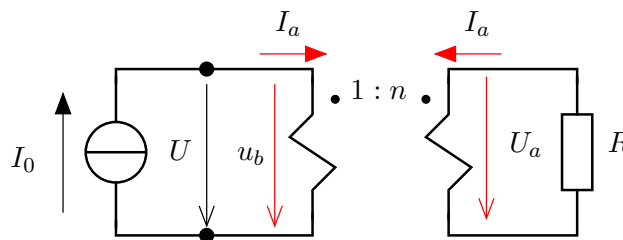
Ez pedig megegyezik az előző módszerrel adódó végeredménnyel . [QED] ◀

3. : Vizsgáljuk meg az ideális transzformátort! Ez a nevét onnan kapta, hogy az ellenállást az egyik oldalról (pl. szekunder oldal) a másik oldalra transzformálja, azaz az adott oldalról nézve az elrendezés eredő ellenállás kiszámolható!

Határozzuk meg az A-B kétpólus eredő ellenállását! Melyik esetet jelenti az $1/n$ alkalmazása n helyett?



Megoldás [3] : Gerjesszük áramforrással és keressük az U feszültséget! A csatolt kétpóluspár áramainak és feszültségeinek felvétele után írjuk fel az két lehetséges hálózati egyenletet!



A keresett mennyiség megegyezik az IT szekunder kétpólusának feszültségével!

$$U = U_b$$

A hálózati egyenletek : az áramforrás felső pólusára

$$-I_0 + I_b = 0$$

és az R felső pólusára (vagy a jobboldali hurokra is felírható egyenlet alapján)

$$U_a + I_a \cdot R = 0$$

A karakterisztika két egyenlete

$$U_a = n \cdot U_b \quad \text{és} \quad I_b = -n \cdot I_a$$

Innen adódik

$$U_b = \frac{1}{n} \cdot U_a = \frac{1}{n} \cdot (-R \cdot I_a) = -\frac{R}{n} \left(-\frac{1}{n} I_0 \right)$$

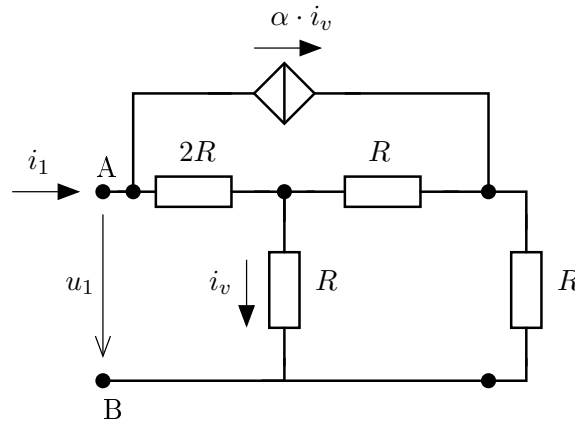
azaz

$$R_b = \frac{U_b}{I_0} = \frac{1}{n^2} R$$

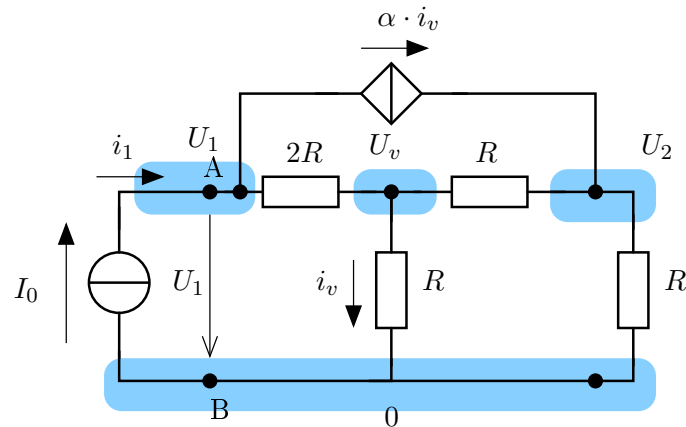
Melyik esetet jelenti az $1/n$ alkalmazása n helyett? Közvetlenül látszik, hogy ebben az esetben az $1 : n$ helyett $1 : (1/n)$ adódik, amelynél az áttétel ismét $n : 1$ lesz. Vagyis a kétpólusok "elnevezése" felcserélődik.

Ha $1 : \frac{1}{n}$ az áttétel, akkor visszkapjuk (1)-ben kapott bemeneti ellenállást!

4. : Határozzuk meg az A-B kétpólus eredő ellenállását! ($R = 5k\Omega$, $\alpha = 0,7$)



Megoldás [4] : A korábbiakban elmondottak alapján



Ismeretlenek : U_1, U_2, U_v, i_v . Ezért 4 egyenlet szükséges számunkra! Az ismeretlenek vektorát az előzőben felsorolt sorrendben vesszük fel.

$$\left. \begin{aligned} -I_0 + \alpha \cdot i_v + \frac{U_1 - U_v}{2R} &= 0 \\ \frac{U_2}{R} - \alpha \cdot i_v + \frac{U_2 - U_v}{R} &= 0 \\ \frac{U_v}{R} + \frac{U_v - U_1}{2R} + \frac{U_v - U_2}{R} &= 0 \\ i_v &= \frac{U_v}{R} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Fordítsuk le ezt mátrixos alakra! ($I_0 = 1 \text{ mA}$ választással!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \cdot R \cdot \alpha \\ 0 & 2 & -1 & -R \cdot \alpha \\ -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_v \\ i_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2R \cdot I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & -3,5 \\ -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_v \\ i_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

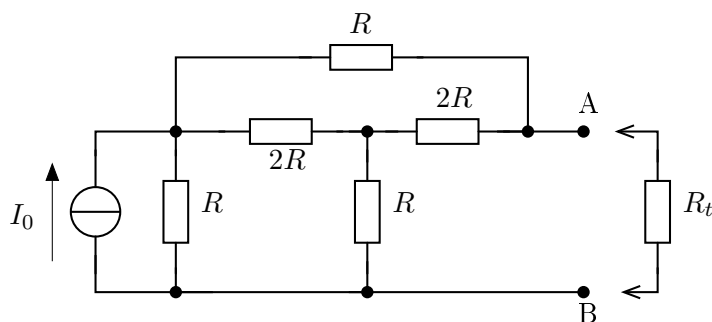
Ennek megoldása : $U_1 = 8,9189 \text{ V}$, $U_2 = 2,2973 \text{ V}$, $U_v = 2,7027 \text{ V}$, $i_v = 0,5405 \text{ mA}$.

A bemeneti ellenállás ezek alapján

$$R_b = 8,9189k\Omega$$

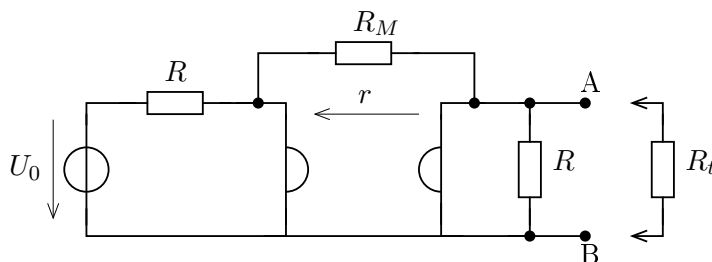
2. Feladatok helyettesítő generátorok meghatározására

1. : Tekintsük az alábbi hálózatot! Határozza meg az A-B kétpólus helyettesítő generátor kapcsolásait! Mekkora terhelő ellenállással kell lezárni az A-B pólusok között, hogy maximális teljesítmény keletkező a lezáró ellenálláson? Mekkora ez a maximális teljesítmény?



Hálózati paraméterek : $R = 2k\Omega$, $I_0 = 5 \text{ mA}$

2. : Adja meg a terhelő ellenálláson (R_t) termelődő maximális teljesítményt és a az A-B kétpólus (R_t felől látható) helyettesítő generátoros ekvivalens áramkört!

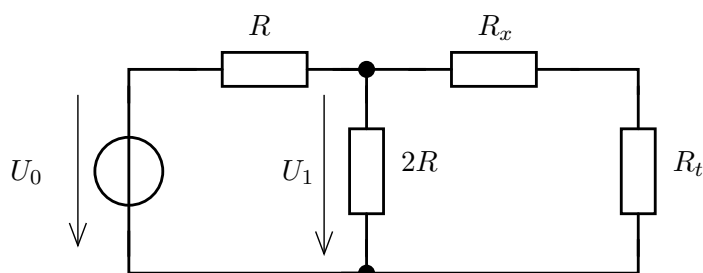


Paraméterek :

Extra feladat : Vizsgálja meg az R_M ellenállás hatását a maximális teljesítményt okozó lezárás értékére nézve!

3. :

Az alábbi hálózatban R_t a terhelő ellenállás. Határozza meg ennek értékét, hogy maximális teljesítmény legyen az ellenálláson! Adja meg a kapott helyettesítő hálózatokat és a maximális teljesítményt! Számítsa ki a bejelölt U_1 feszültséget a teljesítmény illesztéskor!



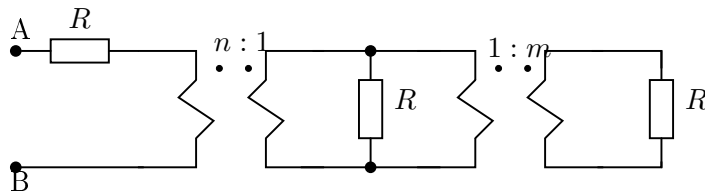
A hálózat paramétereit: $U_0 = 20 \text{ V}$, $R = 100\Omega$, $R_x = 300\Omega$

Extra feladat: Legyen a terhelő ellenállás értéke $R_t = 100\Omega$! Határozza meg az R_x illesztő ellenállást, hogy az $R_x - R_t$ kétpólus teljesítménye legyen maximális! Mekkora lesz ekkor az R_t teljesítménye?



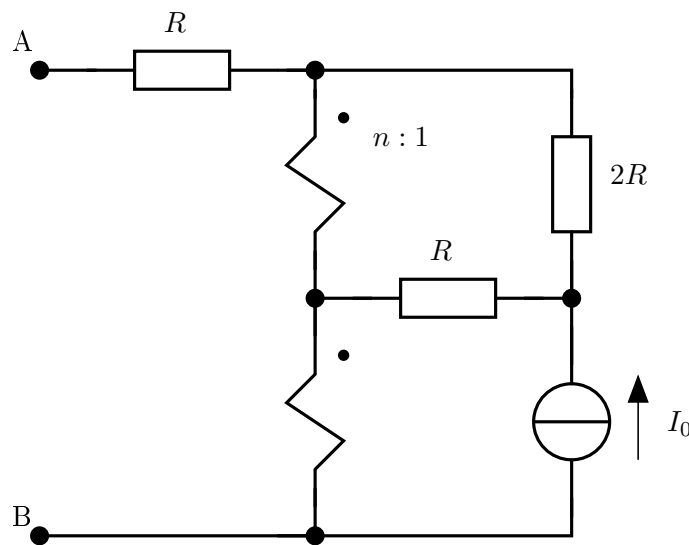
4. :

Határozza meg az A és B között mérhető eredő ellenállást! Mi történik az $m \rightarrow 1$ esetben?



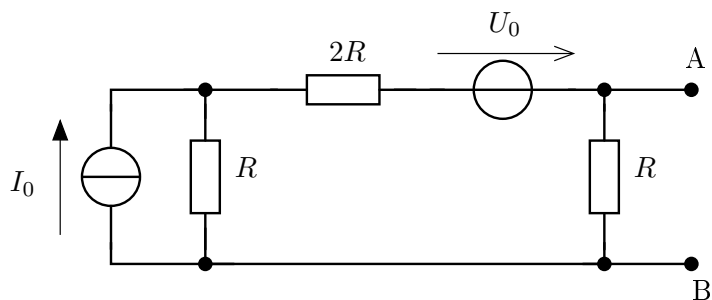
5. :

Számítsa ki az A-B kétpólus mindkét helyettesítő kapcsolását! ($R = 10k\Omega$, $I_0 = 2mA$, $n = 4$)



6. :

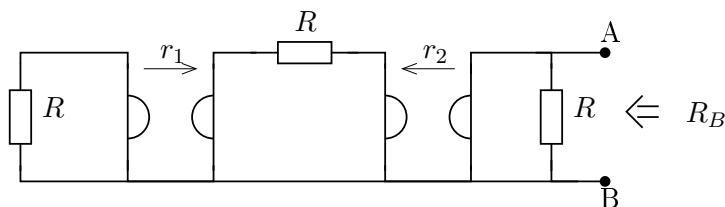
Adja meg a helyettesítő kapcsolást! (Próbálja megoldani minél többféle módon!)



($R = 200\Omega$, $U_0 = 15\text{ V}$, $I_0 = 0,07\text{ mA}$)

7. :

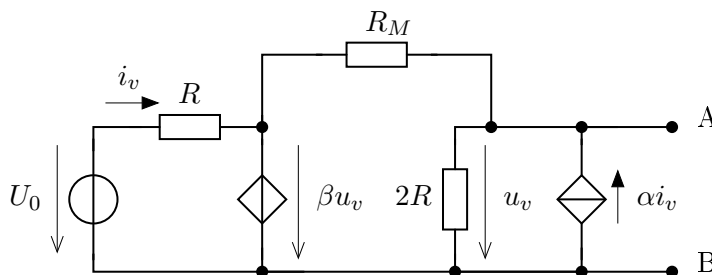
Határozza meg az A-B közötti eredő ellenállást! ($R = 80\Omega$, $r_1 = 40\Omega$, $r_2 = 60\Omega$)



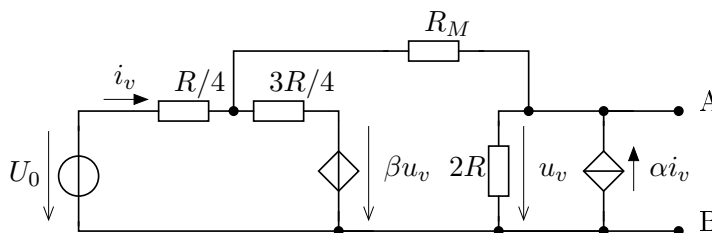
Vizsgálja meg az $r_1 = R$, $r_2 = R$ esetet!

8. :

Az alábbi egy tranzisztoros kapcsolás (kisjelű) helyettesítésével adódó kétpólus. Határozza meg a kétpólus helyettesítő képét! Vizsgálja meg az R_M (Miller-ellenállás) hatását a helyettesítőkép paramétereire!

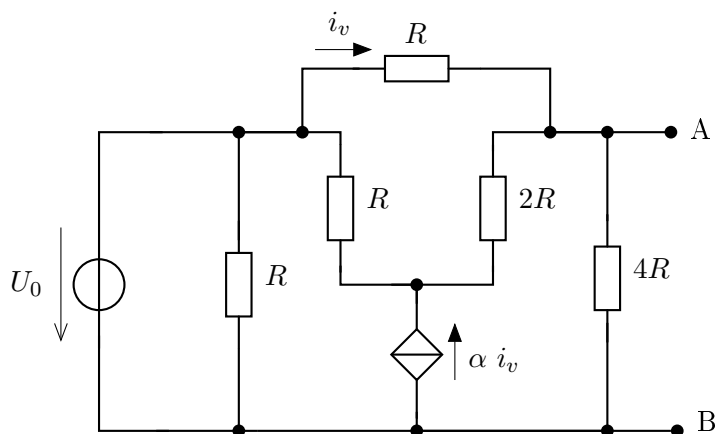


Megjegyzendő, hogy helyesebb az alábbi helyettesítőképet vizsgálni :



9. :

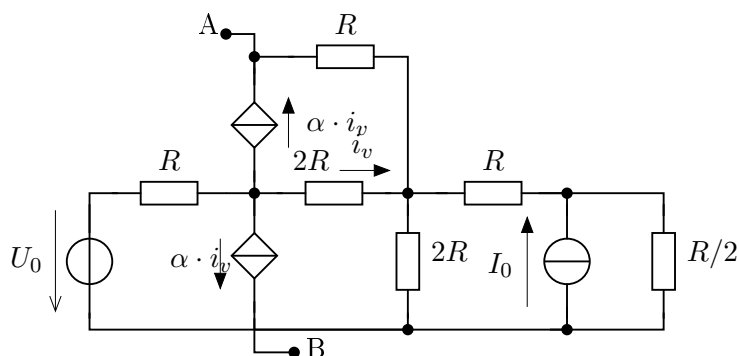
Ez a hálózat egy tranzisztoros erősítőkapcsolás helyettesítő képének alkalmazásával adódott. Határozza meg az A-B kétpólus helyettesítőképeit!



Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $3R$ ellenállással zárjuk le az A-B kétpólust! Hogyan függ a terhelés ($3R$) feszültségének és a forrás feszültségének hányadosa (feszültségátviteli tényezőnek is lehet nevezni) az α paramétertől? Van-e olyan paraméter tartománya α -nak, amelynél valamilyen probléma merül fel?

■

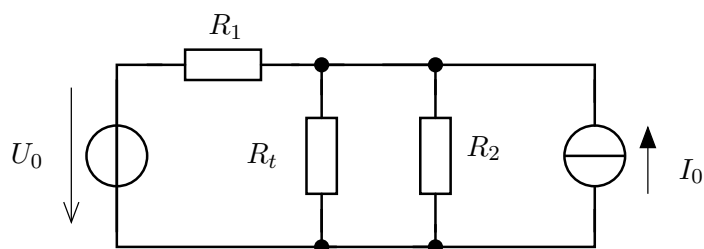
10. : Adja meg az A-B szempontjából a Thévenin- és Norton-helyettesítő képeket! (Hálózati paraméterek : $R = 5\Omega$, $U_0 = 12V$, $I_0 = 0,2A$, $\alpha = 0,7$)



■

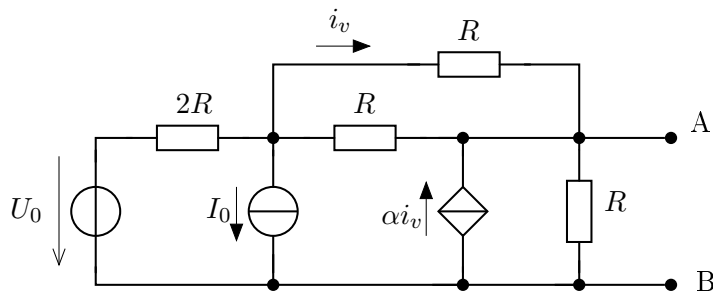
11. :

Vizsgáljuk meg a két (nagyobb hálózatot helyettesítő) generátor (forrás + belső ellenállás) közé helyezett terhelő ellenállást! Határozzuk meg a teljesítményillesztést! Leheteséges-e olyan U_0 értékpár, amikor valamely forrás fogyasztóvá válik?

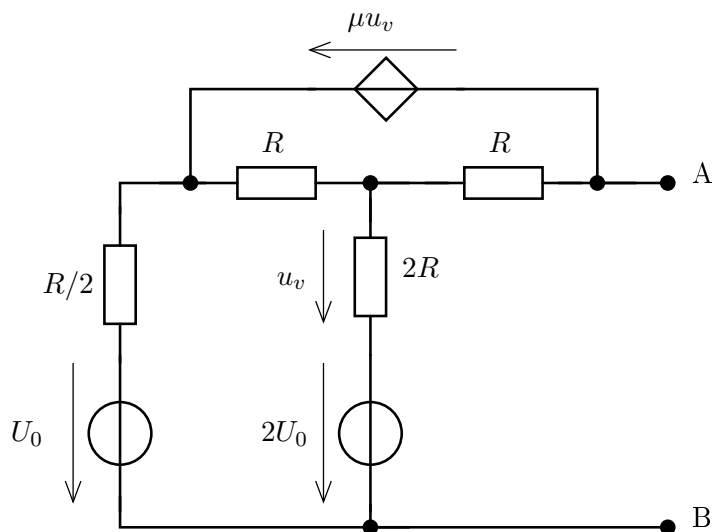


Extra kérdés : Vizsgáljuk meg a terhelő ellenállás teljesítményillesztésének pontatlanságát a források pontatlanságának függvényében! Mennyire érzékeny a forrásmennyiségekre a teljesítményillesztés ellenállása? ■

12. : Határozza meg az alábbi áramkör esetén az A-B kapocs helyettesítő generátoros leírását! Adja meg a az A-B közé kapcsolandó terhelő ellenállás (R_t) értékét, ha maximális teljesítményt szeretnénk rajta elérni! Mekkora ez a maximális teljesítmény? ($R = 5k\Omega$, $U_0 = 15V$, $I_0 = 5mA$ $\alpha = 0,8$)

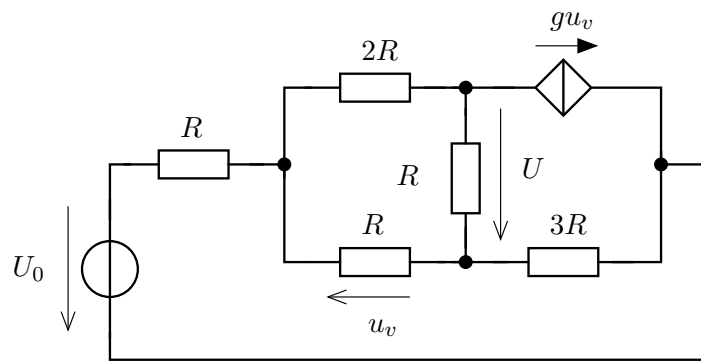


13. : Határozza meg az alábbi áramkör esetén az A-B kapocs helyettesítő generátoros leírását! Adja meg a az A-B közé kapcsolandó terhelő ellenállás (R_t) értékét, ha maximális teljesítményt szeretnénk rajta elérni! Mekkora ez a maximális teljesítmény? ($R = 50\Omega$, $U_0 = 50V$, $\mu = 0,6$)



Vizsgálja meg a μ paramétere extrém értékeinél a hálózat viselkedését! Van-e egyéb érdekes viselkedésű paraméter érték? ■

16. : Az alábbi esetben egí hídkapcsolásban szeretnénk meghatározni a vezérelt erősítő erősítését (g paraméter). Ehhez az U_0 feszültség alapján határozzuk meg az U feszültséget! Adja meg ennek ismeretében a g paraméter értékét!



Extra (érdekes) kérdés : Ha az ellenállások értéke nem pontos, hanem adott pontatlanságú (pl. 1%-os), akkor milyen tartományban változik a g paraméter értéke?

- Elsőként tegyük fel a kérdést olyan módon, hogy az R értéke nem pontos és ekkor mi történik!
- Második modellként feltehetjük, hogy az egyes ellenállások értéke függetlenül szór a megadott pontatlansággal!
- Harmadik modellként mondhatjuk, hogy nem egyenletes eloszlásban, hanem Gauss-i eloszlásban szór az egyes ellenállások értéke!
- Milyen különbségeket láthatunk ezen az esetekben?

