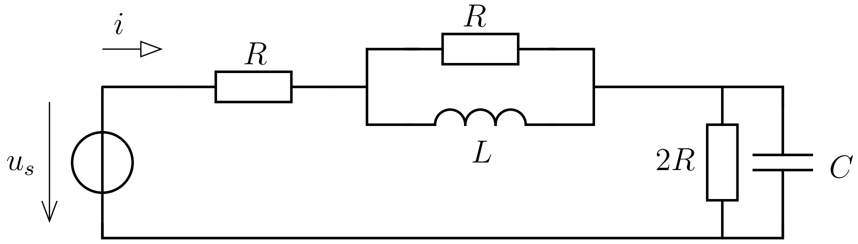
Gyakorló feladatok az állapotváltozós leírás, valamint a kezdeti ill. kiindulási állapot meghatározásához

1. Az ábrán látható hálózat esetében a bejelölt i áram a válasz, a feszültségforrás feszültsége a gerjesztés!



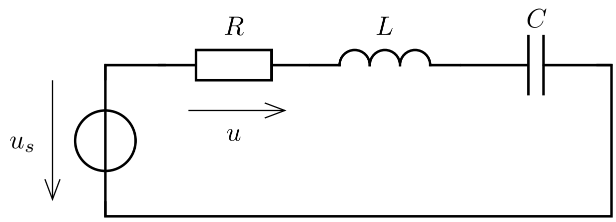
a. Határozzuk meg az alábbi hálózat állapotváltozós leírásának normál alakját és a válasz kifejezését!

b. Határozzuk meg az áram ugrását ($\Delta i = i(+0) - i(-0)$) a $t = 0$ pillanatban, ha

$$u_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ U_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

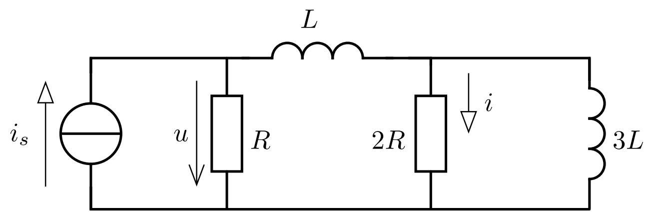
c. Számítsa ki az áram értékét a $t \to \infty$ pillanatban az előző gerjesztés esetében!

2. Írjuk fel az állapotváltozós leírás normál alakját és a válasz kifejezését, ha az u feszültség a válasz és az u_s feszültség a gerjesztés!



Határozzuk meg a rendszer sajátértékeit!

3. A hálózatban az áramforrás árama a gerjesztés, a bejelölt u feszültség és i áram a válasz.

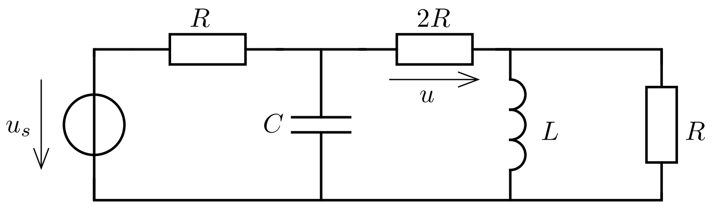


(a) Határozzuk meg az állapotváltozós leírás normál alakját és a válasz kifejezését!

(b) Számítsuk ki a feszültség és az áram ugrását, ha a gerjesztés

$$i_s(t) = \begin{cases} I_0 & t < 0 \\ 2I_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

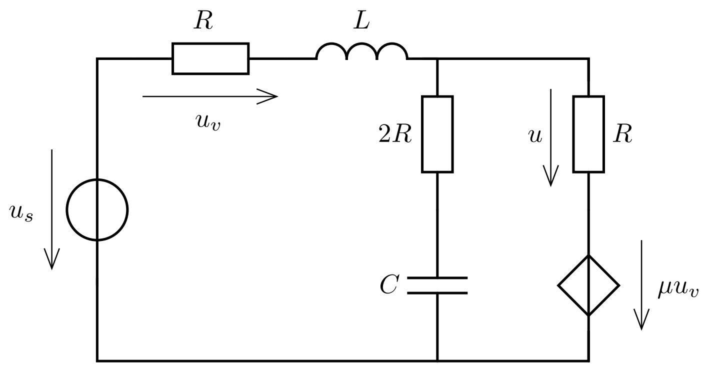
4. A hálózat által reprezentált rendszer forrása a feszültségforrás feszültsége, a válasza a bejelölt u feszültség!



   a. Határozzuk meg az állapotváltozós leírás normál alakkját és a válasz kifejezését!

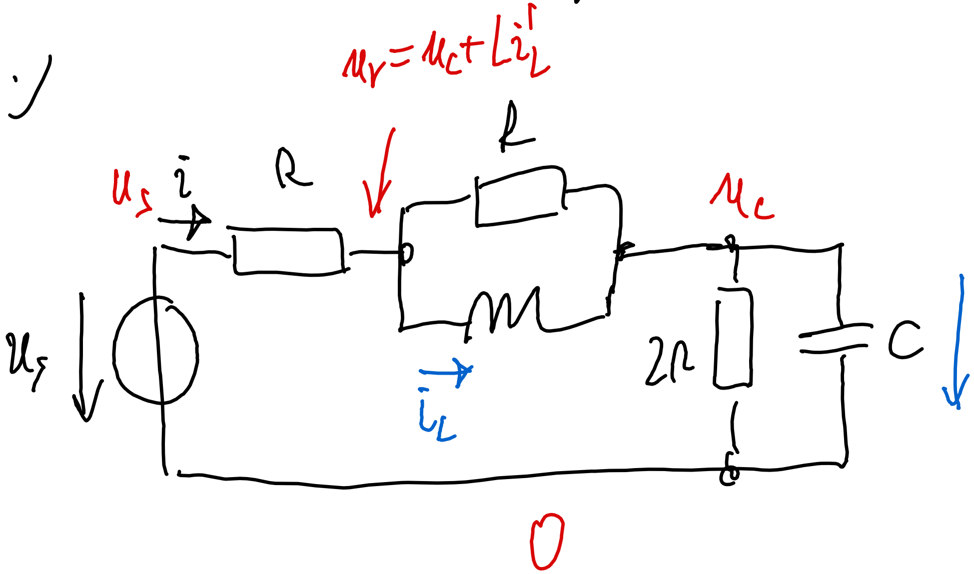
   b. Tekintsük az L és C értékét rögzítettnek. Milyen R érték esetén lesz a rendszer sajátértéke komplex értékű?

5. Határozzuk meg, hogy a μ paraméter milyen tartományában lesz a rendszer stabilis! (A rendszer sajátértéke a komplex sík bal félsíkján kell elhelyezkedjen.) Adjuk meg a rendszer állapotváltozós leírásának normál alakját is!



07AHF-AV.PDF megoldások

1.)



· kihasználva, hogy $u_r = u_c + L \cdot i_L'$

ismeretlenek u_c'; i_L', i

· 2 db csomóponti egyenlet és az i kifejezése

(1) $C u_c' + \frac{u_c}{2R} - i_L + \frac{-L i_L'}{R} = 0$

(3) $i = \frac{u_s - (u_c + L i_L')}{R}$

(2) $i_L + \frac{L i_L'}{R} + \frac{u_c + L i_L' - u_s}{R} = 0$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} u_c \\ i_L \end{pmatrix}$

$$u_c' = -\frac{1}{CR} u_c + \frac{1}{2C} i_L + \frac{1}{2CR} u_s$$

$$i_L' = -\frac{1}{2L} u_c + \left(-\frac{R}{2L}\right) i_L + \frac{1}{2L} u_s$$

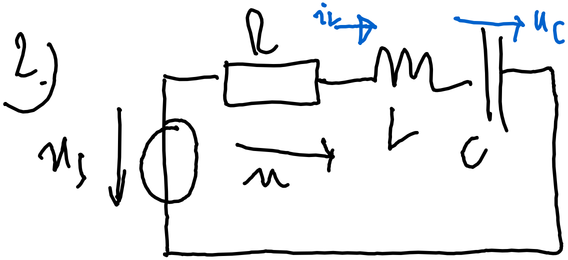
$$i = -\frac{1}{2R} u_c + \frac{1}{2} i_L + \frac{1}{2R} u_s$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{CR} & \frac{1}{2C} \\ -\frac{1}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2CR} \\ \frac{1}{2L} \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2R} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad D = \frac{1}{2R}$$

2.)



1) $-i_L + C u_C' = 0$

2) $u_s - i_L \cdot R - L \cdot i_L' - u_C = 0$

3) $u = i_L \cdot R$

$$u_C' = \frac{1}{C} i_L$$

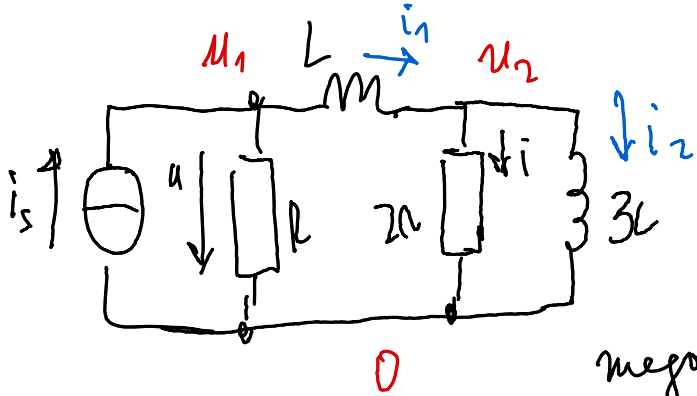
$$i_L' = -\frac{1}{L} u_C - \frac{R}{L} i_L + \frac{1}{L} u_s$$

$$i = R \cdot i_L$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{pmatrix} ; \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}^T = \begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix} ; \quad D = 0$$

3)



ism. i_1', i_2', (u_1, u_2)

fontosak: i_1, i_2, i_s

megoldás rend

1) $u_2 = 3L \cdot i_2'$

2) $u_1 = u_2 + L \cdot i_1'$

3) $-i_s + \dfrac{u_1}{R} + i_1 = 0$

4) $-i_1 + i_2 + \dfrac{u_2}{2R} = 0$

1) és 4)

$3L i_2' = u_2 = 2R(i_1 - i_2)$

$i_2' = -\dfrac{2R}{3L} i_1 + \dfrac{2R}{3L} i_2$

2) és 3)

$2R(i_1 - i_2) + L i_1' = u_1 = R i_s - i_1 R$

$i_1' = -\dfrac{3R}{L} i_1 + \dfrac{2R}{L} i_2 + \dfrac{R}{L} i_s$

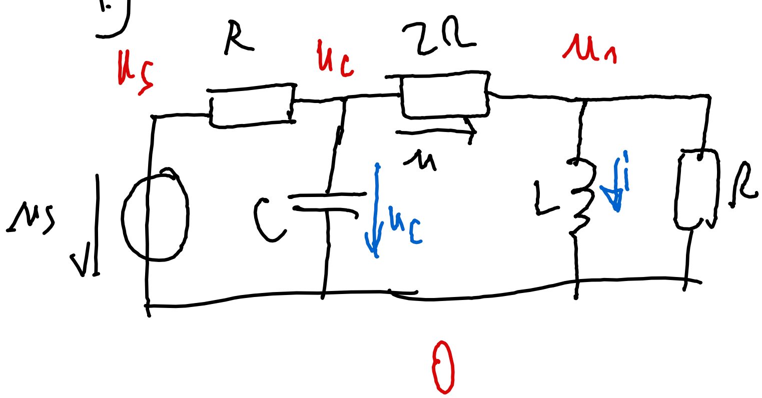
$u = u_1 = -R i_1 + R i_s$

$i = i_1 - i_2$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3R}{L} & \frac{2R}{L} \\ -\frac{2R}{3L} & \frac{2R}{3L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R/L \\ 0 \end{pmatrix} i_s$$

$$\begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{C}^T} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{D}} i_s$$

4.)



$$u_1 = L \cdot i' \qquad (1)$$

$$C u_c' + \frac{u_c - u_1}{2R} + \frac{u_c - u_s}{R} = 0 \qquad (2)$$

$$i + \frac{u_1}{R} + \frac{u_1 - u_c}{2R} = 0 \qquad (3)$$

$$(3) \rightarrow 2Ri + 2u_1 + u_1 - u_c = 0$$

$$3 \cdot L \cdot i' = + u_c - 2Ri \longrightarrow \boxed{i' = \frac{1}{3L} u_c - \frac{2R}{3L} i}$$

$$(2) \rightarrow 2RC u_c' + u_c - u_1 + 2u_c - 2u_s = 0$$

$$2RC \cdot u_c' + 3u_c - L \cdot \left(\frac{1}{3L} u_c - \frac{2R}{3L} i \right) - 2u_s = 0$$

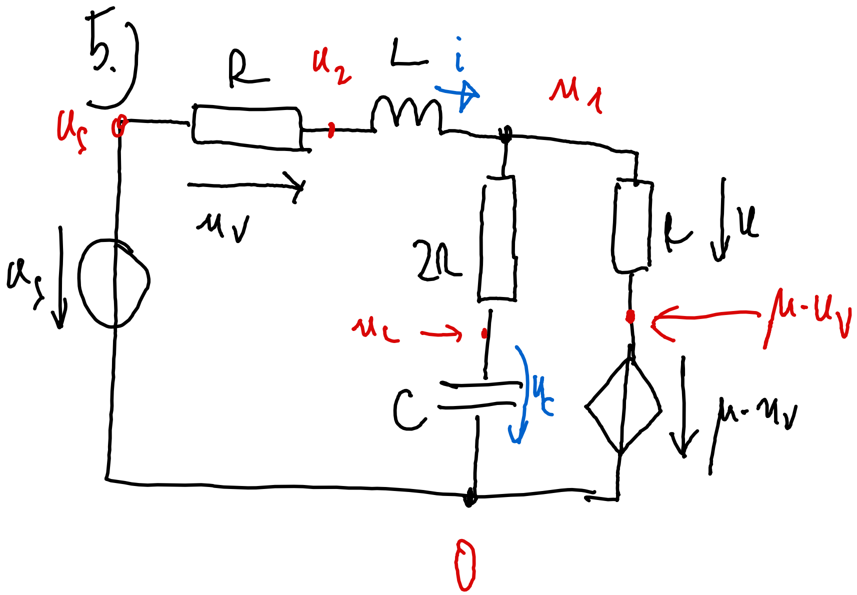
$$2RC \cdot u_c' = -\frac{8}{3} u_c - \frac{2R}{3} i + 2u_s \qquad \boxed{u_c' = -\frac{4}{3RC} u_c - \frac{1}{3C} i + \frac{1}{RC} u_s}$$

$$(4) \quad \boxed{u = u_c - u_1 = \frac{2}{3} u_c + \frac{2R}{3} i}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_c \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3RC} & -\frac{1}{3C} \\ 1/3L & -2R/3L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_c \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/RC \\ 0 \end{pmatrix} u_s$$

$$u = \begin{pmatrix} 2/3 & 2R/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ i \end{pmatrix} + 0 \cdot u_s$$

5.)



áv: i, u_C (nem [illegible] sorrend)

ismeretlenek

$i', u_C', u_V, u_1, u_2 \to 5$ db

források

i, u_C, u_S

① $C u_C' + \dfrac{u_C - u_1}{2R} = 0$

② $\dfrac{u_1 - u_C}{2R} + \dfrac{u_1 - \mu u_V}{R} - i = 0$

③ $\dfrac{u_2 - u_S}{R} + i = 0$

④ $u_2 = u_1 + L \cdot i'$

⑤ $u_V = u_S - u_2$

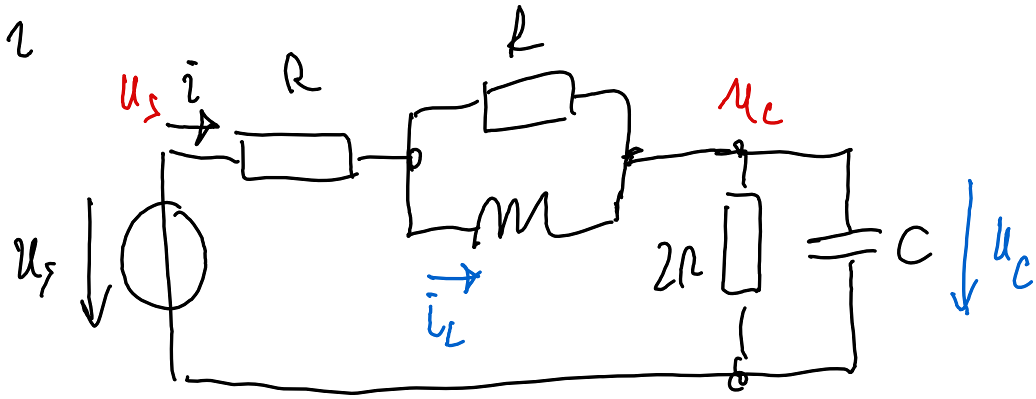
extra (válasz miatt)

$u = u_1 - \mu \cdot u_V$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i \\ u_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5R + 2R\mu}{3L} & -\dfrac{1}{3L} \\ \dfrac{(1+\mu)R}{3RC} & -\dfrac{1}{3RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ u_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \end{pmatrix} u_S$$

$$u = \begin{pmatrix} \dfrac{2R}{3}(1-\mu) & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ u_C \end{pmatrix} + 0 \cdot u_S$$

1.) b.) $t<0$ energiamentes → nincsen benne energia



$u_C(0)=0$

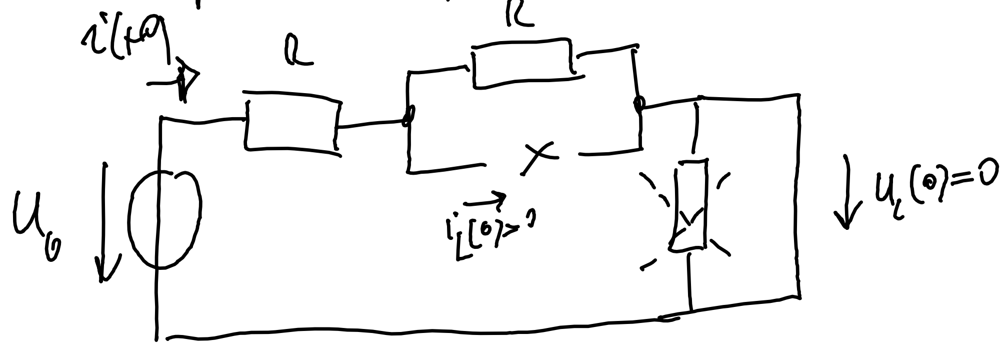
$i_L(0)=0$

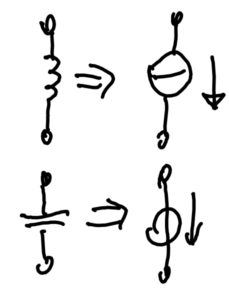
$\boxed{i(-0)=0}$

0

→ $t \to +0$ pillanatban

$i_L(0)=0$ → o–x–o | $u_c(0)=0$ ⇒ o—o

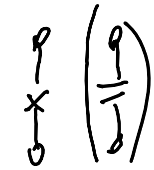




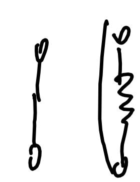
$$i(+0)=\frac{U_0}{R+R}=\frac{U_0}{2R} \qquad \Delta i = i(+0)-i(-0)=\frac{U_0}{2R}$$

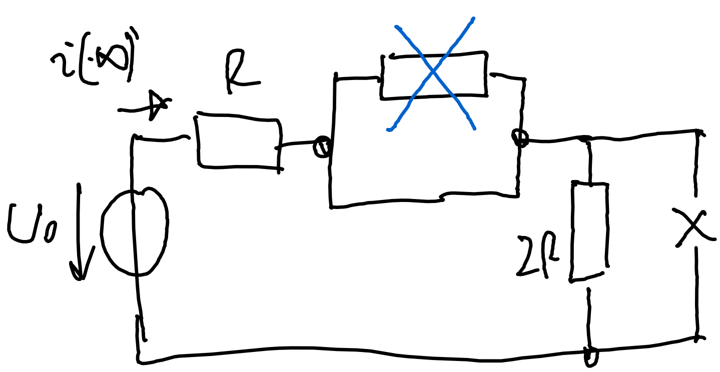
c.) $t\to\infty$ állapot (régóta időben állandó minden)

$$\frac{du_c}{dt}=0 \to i_c=0$$



$$\frac{di_L}{dt}=u_L=0 \to$$





$$i(\infty)=\frac{U_0}{R+2R}=\frac{U_0}{3R}$$

2/k.) Rendszer sajátértékei

$$|\lambda \underline{E} - \underline{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1/C \\ +1/L & \lambda + R/L \end{vmatrix} =$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{pmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}^T = (0 \quad R); \quad D = 0$$

$$= \lambda\left(\lambda + \frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC} =$$

$$= \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC}$$

$$\lambda_{12} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \left(\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

→ komplex s.é. ha $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = \frac{R^2C - 4L}{4L^2C} < 0$

$$R^2C - 4L < 0 \iff L > \frac{R^2C}{4}$$

pl.: $R = 1\,k\Omega$; $C = 1\,nF$; $L = 1\,mH$ $\quad 1 > \frac{1}{4}$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{12} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow T = 2\,\mu s$$

$$\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\mu s}\right)^{-1}$$

• $R = 1\,k\Omega$; $C = 1\,nF$; $L = 0{,}1\,mH$

$$\lambda^2 + 10\lambda + 10 = 0$$

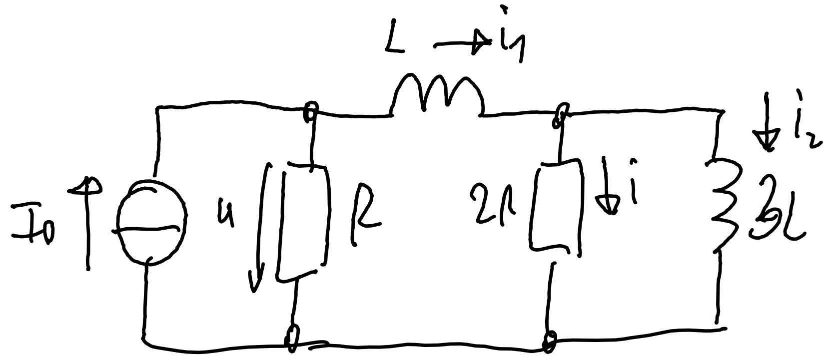
$$\lambda_{12} = \begin{cases} -8{,}873\ \mu s^{-1} & \rightarrow \tau_1 = 0{,}1127\ \mu s \\ -1{,}127\ \mu s^{-1} & \rightarrow \tau_2 = 0{,}8873\ \mu s \end{cases}$$

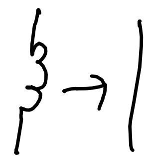
• $R = 1\,k\Omega$; $C = 1\,nF$; $L = 0{,}25\,mH$

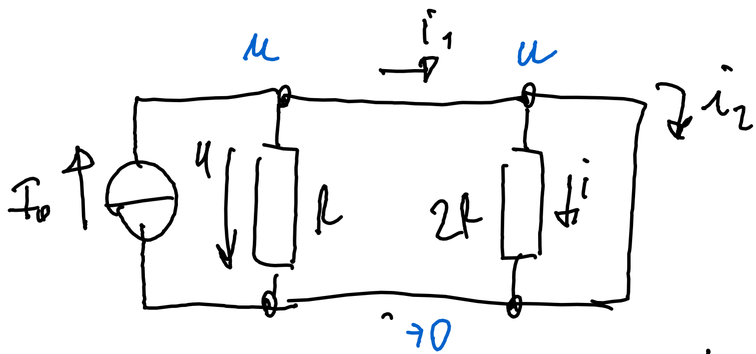
$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2\ \mu s^{-1}$$

3.)b) $t<0$ esetén állandósult állapot, de nem energiamentes

$i_s = I_0$







1.) $u = (R \times 2R) I_0 = \frac{2R}{3} I_0$

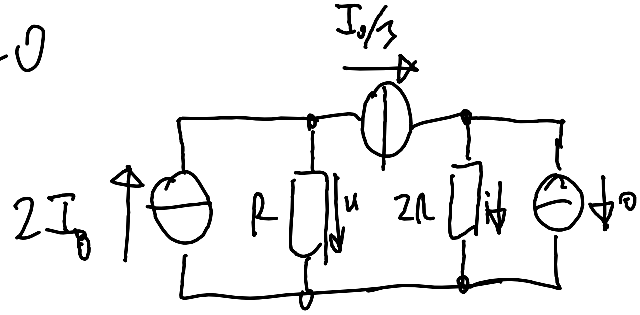
$-I_0 + \frac{u}{R} + i_1 = 0 \rightarrow i_1 = I_0 - \frac{u}{R} =$

$$\boxed{i_1 = \frac{I_0}{3}}$$

$i = \frac{u}{2R} = \frac{1}{3} I_0$

$-i_1 + i + i_2 = 0 \rightarrow \boxed{i_2 = i_1 - i = \frac{I_0}{3} - \frac{I_0}{3} = 0}$

$t = +0$



$i(+0) = \frac{I_0}{3}$

$\boxed{u = R \cdot \left(2I_0 - \frac{I_0}{3}\right)} = \frac{5 I_0 R}{3}$

$\Delta i = i(+0) - i(-0) = \frac{I_0}{3} - \frac{I_0}{3} = 0$

$\Delta u = u(+0) - u(-0) = I_0 R \cdot \frac{5}{3} - I_0 R \cdot \frac{2}{3} = I_0 R$

4.) állapotváltozós leírás

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_C \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3RC} & -\frac{1}{3C} \\ 1/3L & -2R/3L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_C \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/RC \\ 0 \end{pmatrix} u_S$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{4}{3RC} & \frac{1}{3C} \\ -\frac{1}{3L} & \lambda + \frac{2R}{3L} \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{4}{3RC}\right)\left(\lambda + \frac{2R}{3L}\right) + \frac{1}{3C}\cdot\frac{1}{3L} =$$

$$= \lambda^2 + \underbrace{\left(\frac{4}{3RC} + \frac{2R}{3L}\right)}_{\frac{4L+2R^2C}{3CLR}}\lambda + \underbrace{\left(\frac{4}{3RC}\cdot\frac{2R}{3L} + \frac{1}{9LC}\right)}_{\frac{1}{LC}}$$

komplex s.é. $(D<0)$

$$\left(\frac{4L+2R^2C}{3CLR}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{LC} < 0$$

$$\frac{(4L+2R^2C)^2 - 4CLR^2\cdot 9}{(3CLR)^2} < 0 \rightarrow (4L)^2 + 2\cdot 4L\cdot 2R^2C + 4R^4C^2 < 36\cdot CLR^2$$

$$(4L)^2 + 16LC\cdot R^2 + 4C^2\cdot R^4 < 36\cdot CLR^2$$

$$(R^2)^2\, 4C^2 + R^2(-20CL) + (4L)^2$$

$$(-20CL)^2 - 4\cdot 4C^2\cdot(4L)^2 < 0$$

Legyen $L=1$ és $C=1$ adott kvázinormált egységrendszerben!

$$\lambda^2 + \lambda\left(\frac{4}{3R} + \frac{2R}{3}\right) + 1 = 0$$

komplex, ha $\left(\frac{4}{3R} + \frac{2R}{3}\right)^2 - 4 < 0 \Rightarrow (\quad)^2 < 4$

$$\left|\frac{4}{3R} + \frac{2R}{3}\right| < 2 \rightarrow \frac{4}{3R} + \frac{2R}{3} > -2$$

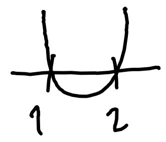
$$4 + 2R^2 > -6R \rightarrow 2R^2 + 6R + 4 > 0$$

minden $R>0$ esetén

$$\frac{4}{3R} + \frac{2R}{3} < 2$$

$$4 + 2R^2 < 6R$$

$$2R^2 - 6R + 4 \overset{?}{=} 0$$



$1 < R < 2$

pl. $R = 0{,}5$; $L=1$; $C=1$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -2{,}667 & -0{,}333 \\ 0{,}333 & -0{,}333 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{cases} -2{,}6180 \\ -0{,}3820 \end{cases}$$

$R = 1{,}5$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -0{,}8889 & -0{,}333 \\ 0{,}333 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda = -0{,}9444 \pm 0{,}3287j$$

$R = 2{,}5$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -0{,}5333 & -0{,}333 \\ 0{,}333 & 1{,}667 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{cases} -0{,}6417 \\ -1{,}5583 \end{cases}$$

5.) Á'VL leírás alapján

sajátérték

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{5R+2R\mu}{3L} & -\frac{1}{3L} \\ \frac{1+\mu}{3C} & -\frac{1}{3RC} \end{pmatrix} \rightarrow |\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{(5+2\mu)R}{3L} & \frac{1}{3L} \\ -\frac{1+\mu}{3C} & \lambda + \frac{1}{3RC} \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{(5+2\mu)R}{3L}\right) \cdot \left(\lambda + \frac{1}{3RC}\right) + \frac{1+\mu}{9LC}$$

$$\lambda^2 + \lambda\left(\frac{1}{3RC} + \frac{(5+2\mu)R}{3L}\right) + \left(\frac{1+\mu}{9LC} + \frac{(5+2\mu)}{9LC}\right) = 0$$

Hurwitz-polinom feltétel másodfokúra ($a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$)
$a, b, c > 0$!

(1) $\frac{1}{3RC} + \frac{R(5+2\mu)}{3L} > 0$

(2) $\frac{1+2\mu}{3LC} > 0$

$1 + 2\mu > 0 \rightarrow \boxed{\mu > -\frac{1}{2}}$ I.

$\frac{L + R^2C(5+2\mu)}{3CLR} > 0$

$(5+2\mu)R^2C + L > 0$

$5 + 2\mu > -\frac{L}{R^2C} \rightarrow \boxed{\mu > \left(-\frac{L}{R^2C} - 5\right)\frac{1}{2}}$ II.

L, R, C > 0 esetén

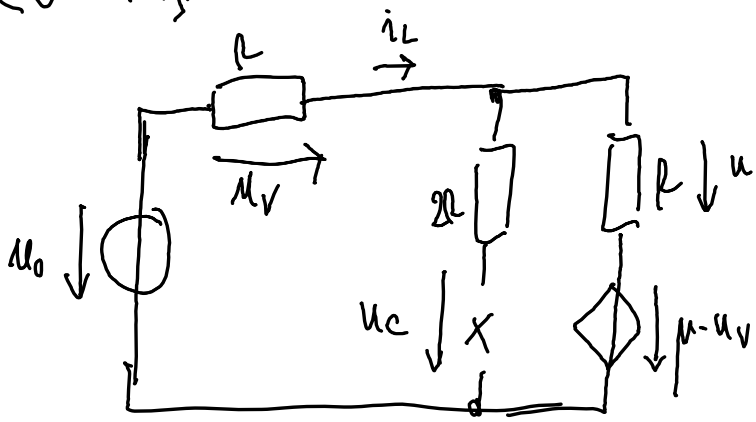
II. < I.

ezért $\boxed{\mu > -\frac{L+5R^2C}{R^2C}}$

5.) e.) $u_s = \begin{cases} U_0, & t<0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$ kiragadás, $\mu > 0$ $\mu = 0{,}9$

$(R = 1\ \mathrm{k\Omega};\ L = 2\ \mathrm{mH};\ C = 1\ \mathrm{nF})$

$t<0$ $u_s = U_0$



$$(U_0 - \mu \cdot u_v)\cdot \frac{1}{2} = u_v$$

$$U_0 = (2+\mu)\, u_v$$

$$u_v = \frac{U_0}{2+\mu}$$

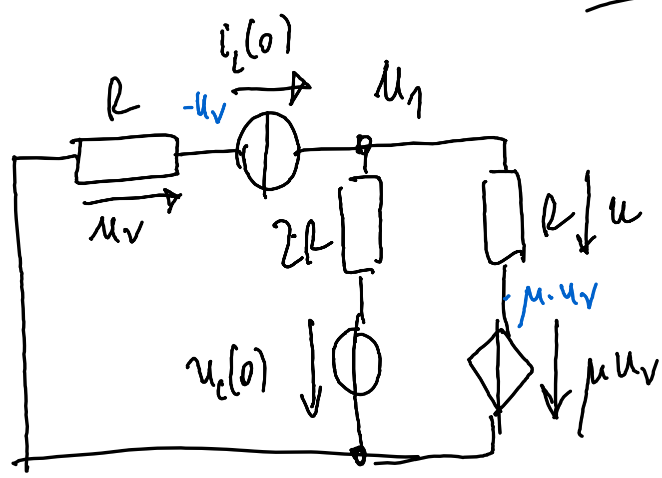
$$u_C(0) = u + \mu \cdot u_v$$

$$i_L(0) = \frac{U_0 - \mu u_v}{2R}$$

$$u = U_0 - (1+\mu) u_v \longrightarrow \boxed{u = U_0 - \frac{(1+\mu)\cdot U_0}{2+\mu} = \frac{(2+\mu)-(1+\mu)}{2+\mu} U_0 = \frac{U_0}{2+\mu}}$$

$$\boxed{u_C(0) = u + \mu \cdot u_v = \frac{U_0}{2+\mu} + \mu \cdot \frac{U_0}{2+\mu} = \frac{1+\mu}{2+\mu} U_0}$$

$$\boxed{i_L(0) = \frac{1}{2R}\left(U_0 - \mu \frac{U_0}{2+\mu}\right) = \frac{U_0(2+\mu-\mu)}{2R(2+\mu)} = \frac{U_0}{(2+\mu)R}}$$



$$u_v = R \cdot i_L(0)$$

$$-i_L(0) + \frac{U_1 - u_C(0)}{2R} + \frac{U_1 - \mu \cdot u_v}{R} = 0$$

$$u = U_1 - \mu u_v$$

$$\frac{U_0}{\cancel{R}} \frac{1}{2+\mu} + \frac{1+\mu}{2+\mu} U_0 \frac{1}{2\cancel{R}} + \mu \cdot \frac{\cancel{R} \cdot U_0}{\cancel{R}} \frac{1}{2+\mu} \cdot \frac{1}{\cancel{R}} = U_1\left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}\right) = U_1 \frac{3}{2\cancel{R}}$$

0

$$U_1 = \frac{2}{3} U_0 \left(\frac{1}{2+\mu} + \frac{1+\mu}{2(2+\mu)} + \frac{\mu}{2+\mu}\right) = \frac{2U_0}{3} \frac{2+(1+\mu)+2\mu}{2(2+\mu)} = \frac{3(1+\mu)}{3(2+\mu)} U_0$$

$$U_1 = \frac{1+\mu}{2+\mu} U_0 \qquad u = U_1 - \mu \cdot u_v = U_1 - \mu \cdot R \cdot \frac{U_0}{2+\mu} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\boxed{u = U_0 \cdot \left(\frac{1+\mu}{2+\mu} - \frac{\mu}{2+\mu}\right) = \frac{U_0}{2+\mu}} \qquad \boxed{t = +0}$$

$$\Delta u = u(+0) - u(-0) = \frac{U_0}{2+\mu} - \frac{U_0}{2+\mu} = 0$$