1.) Általános eset:

$$\frac{dx}{dt} = x' = a \cdot x + \cdot b \cdot u \,, \text{ ahol } a, b \in \mathbb{R}$$

gerjesztés: $u(t) = U_0 \cdot \varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ U_0, & t \geq 0 \end{cases}$

$x(0) = 0$ ($t<0$ esetén energiamentes)

$\rightarrow x = x_f + x_g$ $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_f + x_g) = \frac{d}{dt}x_f + \frac{d}{dt}x_g$

· $x_f' = a x_f \longrightarrow x_f = M e^{\lambda t}$ (miért? $\frac{dx_f}{dt} = a x_f$

$\downarrow$

visszahelyettesítve

$\lambda M e^{\lambda t} = a M e^{\lambda t}$

$(\lambda - a) M \cdot e^{\lambda t} = 0$

$\lambda - a = 0 \longrightarrow \boxed{\lambda = a}$

$\frac{dx_f}{x_f} = a \cdot dt \rightarrow \int \frac{1}{x_f} dx_f = \int a\, dt$

$\ln x_f = a \cdot t$

$x_f = e^{at}$!)

• gerjesztőjelhez tartozó x_g

$t \gg 0 \Rightarrow u = U_0 =$ áll. $\longrightarrow$ a gerjesztett összetevő is állandó

$x_g = K =$ áll.

$x_g' = 0 = a \cdot x_g + b \cdot u$

$0 = a \cdot K + b \cdot U_0 \longrightarrow K = -\frac{b \cdot U_0}{a}$

• kezdeti érték érvényesítése

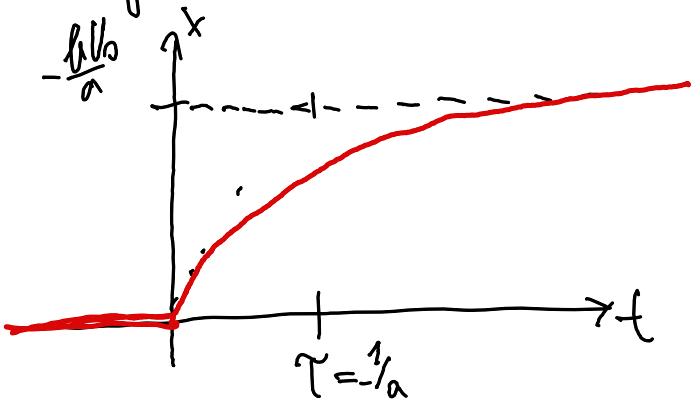
$x(0) = 0 = \left(M e^{at} + K\right)\Big|_0 = M \cdot e^{at}\Big|_0 + K = M + K$

$\boxed{M = -K}$

• teljes megoldás $x = M \cdot e^{at} + K = \frac{bU_0}{a} e^{at} - \frac{bU_0}{a}$

$$x = \left(-\frac{bU_0}{a}\right) \cdot \left(1 - e^{at}\right)$$

megoldás ábrázolása



válasz (y) kifejezése:

$(c^T, d \in \mathbb{R}^1)$

$$y = c^T \cdot x + d \cdot u =$$

$$= c^T \cdot \left(-\frac{bU_0}{a}\right)\left(1 - e^{at}\right) + d \cdot U_0 =$$

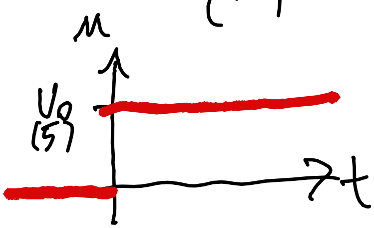
$$= \left(-\frac{bU_0}{a} \cdot c^T + dU_0\right) + \frac{c^T \cdot bU_0}{a} e^{at}$$

N

Numerikus példa

$$\left.\begin{aligned} x' &= -5x + 2u \\ y &= 7x - 3u \end{aligned}\right\}$$

$$u(t) = \begin{cases} 5, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$



- $\lambda = a = -5$
- $x_g = K = \text{áll.}$

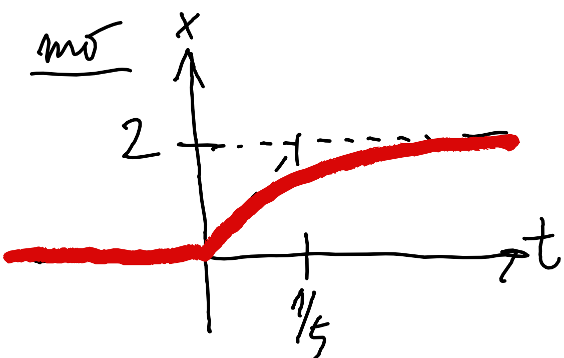
$$0 = -5 \cdot K + 2 \cdot U_0 = -5K + 2 \cdot 5$$

$$\boxed{K = \frac{10}{5} = 2}$$

- $x(0) = 0 = M \cdot e^{-5t} + 2$

$$\boxed{M = -2}$$

mo

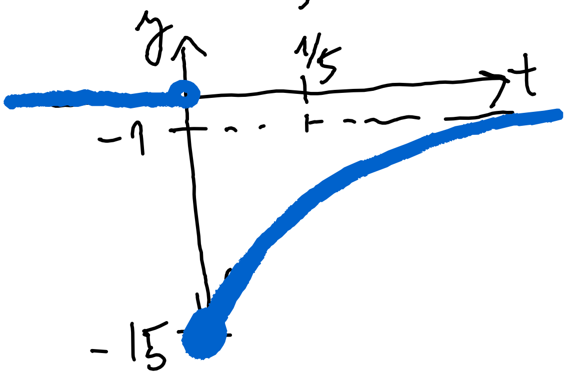


- $\underset{(t>0)}{x(t)} = 2 + (-2)e^{-5t} = 2(1 - e^{-5t})$

- $y = 7 \cdot x - 3u =$

$$= 7 \cdot 2 \cdot (1 - e^{-5t}) - 3 \cdot 5 =$$

$$= (14 - 15) - 14e^{-5t} = (-1) - 14e^{-5t}$$



Milyen értéke lehet az "a" paraméternek?

→ valós! $-\infty < a < \infty$

→ rendszer legyen stabil, nem szállhat el!

(pl. konstans gerjesztés esetén, hosszú idő után egy konstans értéken tartson az állapotváltozó értéke)

lásd megoldás

$$x = M + K \cdot e^{at} \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) \overset{!}{=} M$$

ezért $\lim_{t\to\infty} K e^{at} = 0$, ami csak $\boxed{a < 0}$ esetén valósul meg

2. Példa Kikapcsolási folyamat

$$\left.\begin{aligned} x' &= -5x + 2u \\ y &= 7x - 3u \end{aligned}\right\} \qquad u(t) = \begin{cases} U_0, & t<0 \\ 0 & t>0 \end{cases} \qquad U_0 = 10$$

→ kezdeti érték: $t<0$, olyan mint az 1. Példában $t \to \infty$

$$x \to X_0 = \text{áll.} \Rightarrow 0 = -5X_0 + 2 \cdot U_0 \to X_0 = \frac{20}{5} = 4$$

$$\left.\begin{aligned} &\to t>0 \quad u \equiv 0 \Rightarrow x_g = 0 \\ &\lambda = a = -5 \end{aligned}\right\} \quad x(t) = M e^{-5t}, \quad t>0$$

illesztés $t=0$-ban $x(0) = X_0 = 4$

$$M e^{-5t}\Big|_0 = x(0) = 4 \Rightarrow M = \frac{4}{1} = 4$$

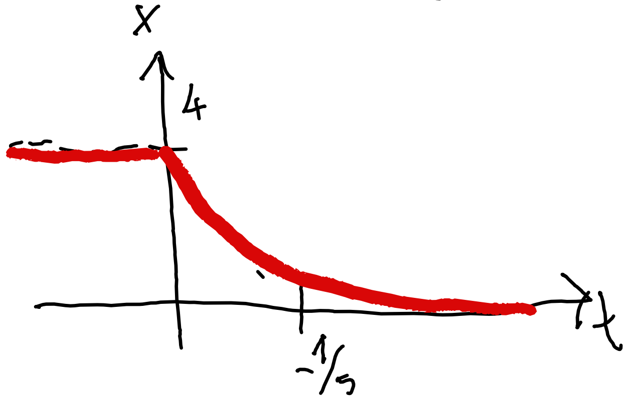
$$x(t) = \begin{cases} 4, & t<0 \\ 4e^{-5t}, & t>0 \end{cases}$$

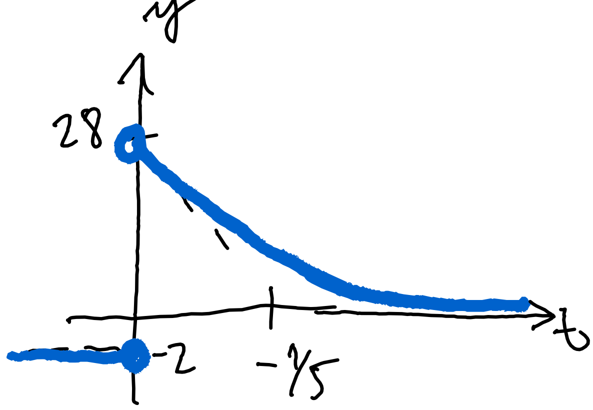
$y(t) = 7x(t) - 3u(t)$ ("sima" behelyettesítés)

$t<0 \quad y = 7 \cdot X_0 - 3 \cdot U_0 = 7 \cdot 4 - 3 \cdot 10 = -2$

$t>0 \quad y = 7 \cdot 4 e^{-5t} - 3 \cdot 0 = 28 e^{-5t}$

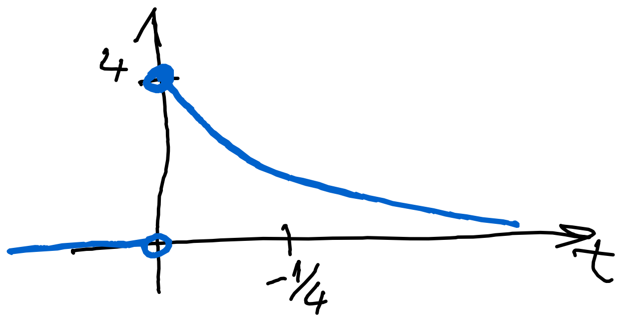
$$y(t) = \begin{cases} -2, & t<0 \\ 28 e^{-5t}, & t>0 \end{cases}$$





3. Példa

$$\left.\begin{aligned} x' &= -5x + 2\cdot u \\ y &= 7x - 3u \end{aligned}\right\} \qquad u(t) = 4e^{-4t}\varepsilon(t).$$



· sajátérték $\boxed{\lambda = -5}$

· gerjesztett összetevő

$x_g \sim u$, azaz $x_g = Ke^{-4t}$

$\Rightarrow x_g' = -5x_g + 2u \Rightarrow -4\cdot Ke^{-4t} = -5\cdot(Ke^{-4t}) + 2\cdot 4e^{-4t}$

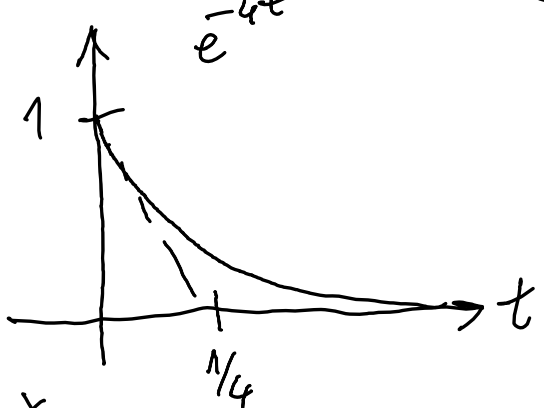
$\Rightarrow -4K = -5K + 8 \Rightarrow \boxed{K = \frac{8}{5-4} = 8}$

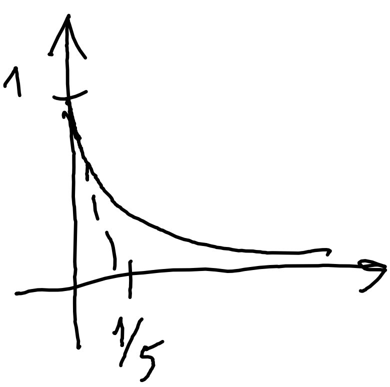
· kezdeti feltétel $(t=0)$ $\boxed{x(0) = 0}$

teljes mo: $Me^{-5t} + 8e^{-4t} = x(t)$

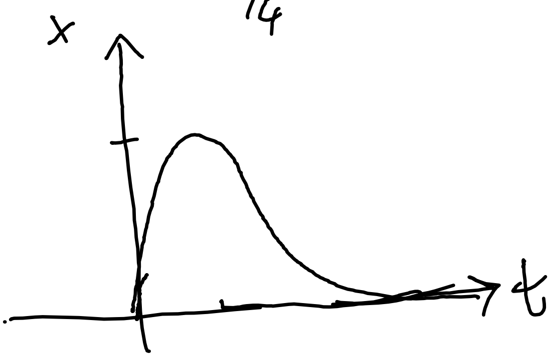
$x(0) = (Me^{-5t} + 8e^{-4t})\big|_0 = M + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{M = -8}$

teljes mo: $x(t) = (-8)e^{-5t} + 8e^{-4t}$, $t > 0$





e^{-4t} lassabban lecsengő, mint e^{-5t}



Maximum?

$(-8e^{-5t} + 8e^{-4t})' = 0$

$40e^{-5t} - 32e^{-4t} = 0$

$(t>0)!$

$\frac{e^{-5t}}{e^{-4t}} = e^{-t} = \frac{32}{40} \to \boxed{t = -\ln\left(\frac{32}{40}\right)}$

$(40e^{-5t} - 32e^{-4t})' = -200e^{-5t} + 128e^{-4t} =$

válasz kifejezése:

$$y = 7x - 3u = 7\left(-8e^{-5t} + 8e^{-4t}\right) - 3\cdot 4e^{-4t} =$$

$$= -56e^{-5t} + e^{-4t}(56-12) =$$

$$= -56e^{-5t} + 44\cdot e^{-4t}$$