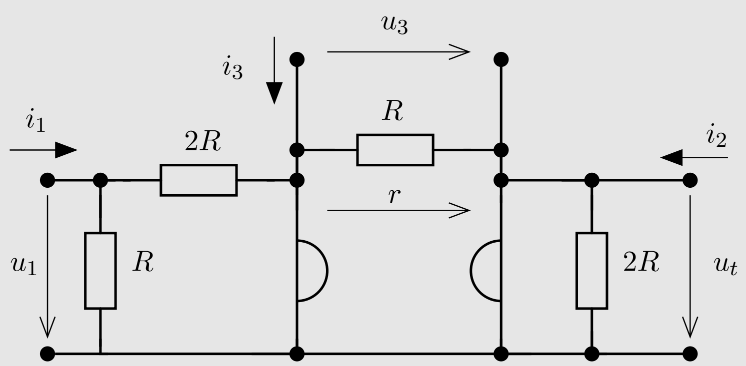
Kiegészítő példák a 6. gyakorlat anyagából

Reichardt András

2021. március 18. - 2021. március 23.

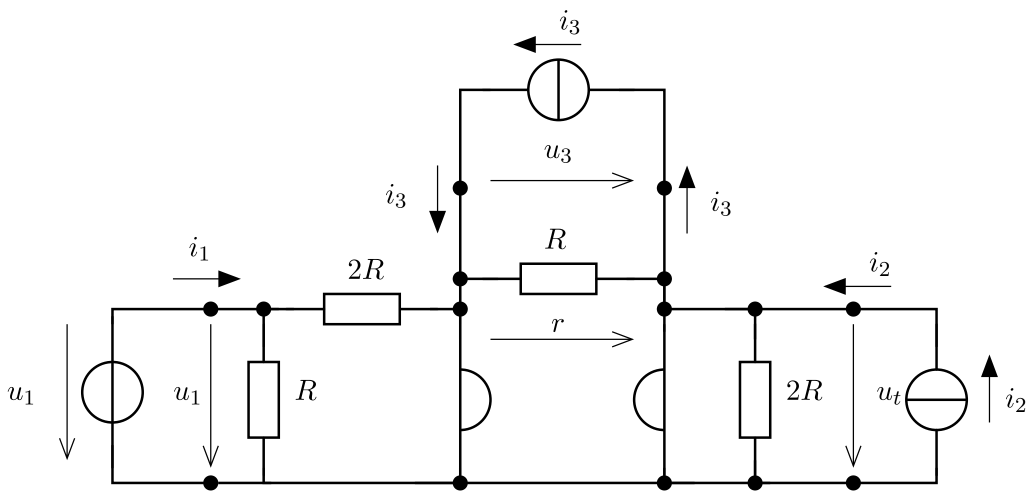
Példák

Feladat 2. Az alábbi hálózat egy háromkaput mutat. Határozzuk meg a háromkapu egy hibrid karakterisztikáját! (i_1,u_2,u_3 a három független változó).



Megoldás :

Alkalmazzunk csomóponti potenciálokat! Ehhez először határozzuk meg a csomópontokat, vegyük fel a csomóponti potenciálokat és az összekapcsolási kényszereket is alkalmazzuk. A meghatározandó karakterisztikának megfelelően



A kapu (port) áramainak definícióját vettük figyelembe a 3. kapu áramainál. Ezek alapján a felírható egyenletek az alábbiak lesznek. Az ismeretlenek : $i_1, u_2, u_3, u_a, i_a, i_b$.

$$\left.\begin{aligned}
-i_1 + \frac{u_1}{R} + \frac{u_1 - u_a}{2R} &= 0 \\
-i_2 + \frac{u_2}{2R} + \frac{u_2 - u_a}{R} + i_b + i_3 &= 0 \\
\frac{u_a - u_1}{2R} + \frac{u_a - u_2}{R} + i_a - i_3 &= 0 \\
u_3 &= u_a - u_2 \\
u_2 &= -r \cdot i_b \\
u_2 &= r \cdot i_a
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

A megoldás során most is figyelembe kell vennünk, hogy a források u_1, i_2 és i_3. Az egyenleteket ennek megfelelően kell rendezni.

Az egyenletek alapján, azok megoldásával adódó karekterisztikát szimbolikus számítással határozzuk meg, a lenti kód használatával. Az utolsó lépésnél a $r = R/2$ összefüggést is felhasználjuk.

Listing 1. Egy hibrid karakterisztika kiszámítása

```
                % Haromkapu karakterisztika szamitasa szimbolikusan
% r = R/2
% abra (halozat) : SP95cf
syms u1 u2 u3 i1 i2 i3 ua ia ib R r
eq1 = -i1 + u1/R + (u1-ua)/(2*R) == 0;
eq2 = -i2 + u2/(2*R)+ (u2-ua)/R+ ib + i3 == 0;
eq3 = (ua-u1)/(2*R) + ia + (ua-u2)/R - i3 == 0;
eq4 = u3 == ua - u2;
eq5 = ua == -r * ib;
eq6 = u2 == r * ia;
sol = solve([eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6], [i1,u2,u3, ua,ia,ib])

pretty( collect( simplify( subs(sol.i1, {r}, {R/2})), [u1, i2, i3]))
pretty( collect( simplify( subs(sol.u2, {r}, {R/2})), [u1, i2, i3]))
pretty( collect( simplify( subs(sol.u3, {r}, {R/2})), [u1, i2, i3]))
```

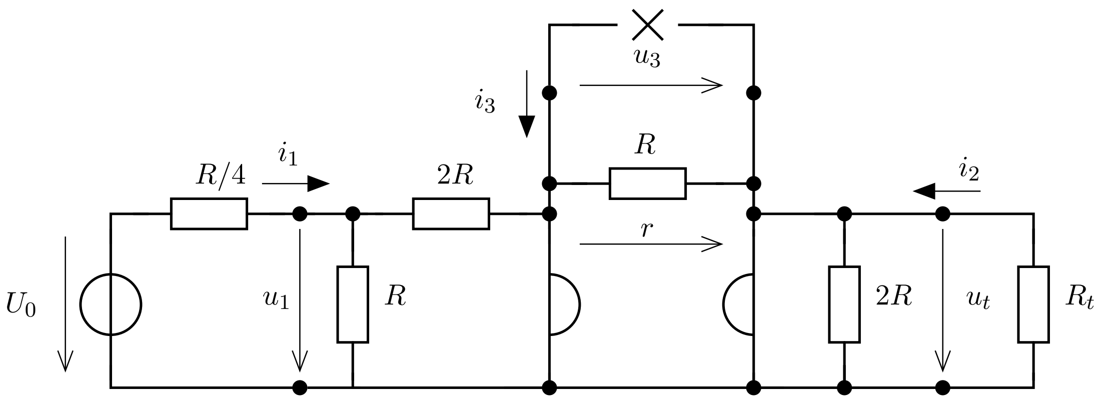
A szkript által adott megoldást értékelve adódik, hogy a keresett karakterisztika mátrixa az alábbi lesz.

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{H}}} = \begin{pmatrix} 10/7R & 2/21 & -5/21 \\ 2/7 & 2R/7 & 2R/7 \\ -1/7 & -10R/21 & 4R/21 \end{pmatrix}$$

Feladat 3. Az előző feldatbeli háromkapu egyes kapuit zárjuk rendre egy feszültséggenerátorral ($U_0 = 10V$, $R_0 = R/4$), egy terhelő ellenállással ($R_t = 1{,}5R$) és egy szakadással. Határozzuk meg a terhelés feszültségét és áramát, ha nem használjuk a háromkapu karakterisztikát! $R = 2\ k\Omega$

Megoldás : A feladat szövege alapján az alábbi kapcsolást tudjuk felrajzolni.



A korábbi egyenletek az alábbi három, a kapukra kapcsolt kétpólusok és az összekapcsolási kényszerek által meghatározott egyenletekkel egészülnek ki.

$$\begin{aligned} u_1 &= U_0 - \frac{R}{4} \cdot i_1 \\ u_2 &= -R_t \cdot i_2 \\ i_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

A korábbi (1) és a mostani (2) egyenletek alapján az előálló lineáris egyenletrendszer mátrixos alaja az alábbi :

$$\begin{pmatrix} 3/2R & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & -1/2R & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3/2R & \cdot & \cdot & -1 & 1 & -1/R & \cdot & 1 \\ -1/2R & -1/R & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 3/2R & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & r \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -r & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & R/4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & R_t & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ u_a \\ i_a \\ i_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_0 \\ \cdot \end{pmatrix}$$

A megoldó kód az alábbi

Listing 2. A lezárt háromkapu megoldása

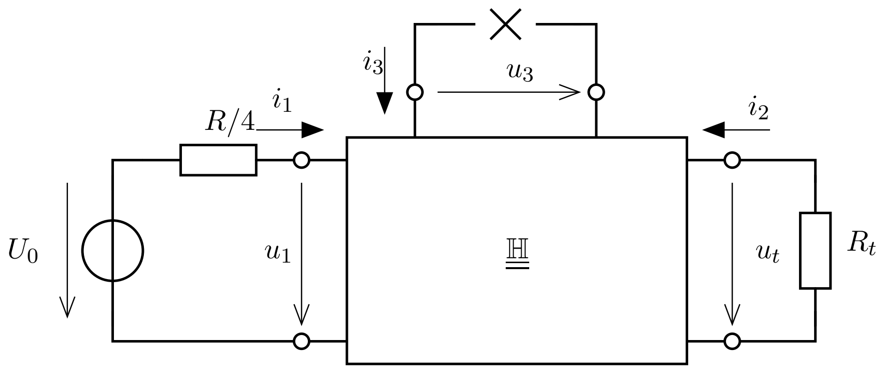
```
                %% Numerikus megoldas az elozo feladatbeli halozatra
clear all
% primer kapu   :  feszultseggenerator U0, R/4 (u1 + i1*R/4 = U0)
% szekunder     : Rt=1.5*R terheles (u2 = -i2*Rt)
% tercier       : szakadas (i3=0)
U0 = 10; R=2; Rt=1.5*R; r = R/2;
% ismeretlenek : u1, u2, u3, i1, i2, i3, ua, ia, ib
A = [3/(2*R) 0 0 -1 0 0 -1/(2*R) 0 0; ...
    0 3/(2*R) 0 0 -1 1 -1/R 0 1;...
    -1/(2*R) -1/R 0 0 0 -1 3/(2*R) 1 0;...
    0 1 1 0 0 0 -1 0 0;...
    0 0 0 0 0 0 1 0 r;...
    0 1 0 0 0 0 0 -r 0;...
    0 0 0 0 0 1 0 0 0;...
    1 0 0 R/4 0 0 0 0 0;...
    0 1 0 0 Rt 0 0 0 0];
B = [0;0;0;0;0;0;0;U0;0];
x = A \ B
u2 = x(2); i2 = x(5);
```

Feladat 4. Oldjuk meg az előbbi feladatot, ha felhasználjuk a korábban megállapított háromkapu karakterisztikát!

Megoldás : A korábbi alapján a kiszámított hibrid karakterisztika :

$$\underline{\underline{\mathbb{H}}} = \begin{pmatrix} 10/7R & 2/21 & -5/21 \\ 2/7 & 2R/7 & 2R/7 \\ -1/7 & -10R/21 & 4R/21 \end{pmatrix}$$

A lezárások is figyelembe vevő ábra az alábbi :



A háromkapu karakterisztikából adódó 3 egyenlet mellett a három lezárásra vonatkozó egyenletekből (2) áll össze a megoldandó egyenletrendszer, amelynek mátrixos alakja az alábbi.

$$\begin{pmatrix} -H_{11} & \cdot & \cdot & 1 & -H_{12} & -H_{13} \\ -H_{21} & 1 & \cdot & \cdot & -H_{22} & -H_{23} \\ -H_{31} & \cdot & 1 & \cdot & -H_{32} & -H_{33} \\ 1 & \cdot & \cdot & R/4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & R_t & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \tag{3}$$

Az egyenletek alapján megoldva :

```
%% Megoldas a haromkapu karakterisztikaval
% Az ismeretlenek szama 6 --> u1 u2 u3 i1 i2 i3
H = [10/(7*R) 2/21 -5/21;2/7 2*R/7 2*R/7;-1/7 -10*R/21 4*R/21];
% ismeretlenek : u1 u2 u3 i1 i2 i3
AA = [-H(1,1) 0 0 1 -H(1,2) -H(1,3);-H(2,1) 1 0 0 -H(2,2) -H(2,3);...
    -H(3,1) 0 1 0 -H(3,2) -H(3,3);1 0 0 R/4 0 0;...
    0 1 0 0 Rt 0;0 0 0 0 0 1];
BB = [0;0;0;U0;0;0];
xx= AA \ BB
```

Az előző két feladat megoldását összehasonlíthatjuk (a megoldások különbségét nézzük), akkor az alábbi eredményt kapjuk.

```
>> x(1:6)-xx

ans =

   1.0e-15 *

         0
    0.2220
   -0.3331
         0
   -0.2220
   -0.0549
```

Bár ez nem azonos nulla minden változó esetében, azonban a 10^{-15} nagyságrend azt mutatja, hogy ezek csak a numerikus számábrázolásból adódó hiba következményei, ezért a két megoldással azonos eredményre jutunk. Azonban a háromkapu (illetve általánosságban n-kapu) számítással jóval kevesebb ismeretlenre kell megoldani az egyenletredszert. További előny, hogy a lezárások változása esetén kevesebb újraszámolás szükséges.