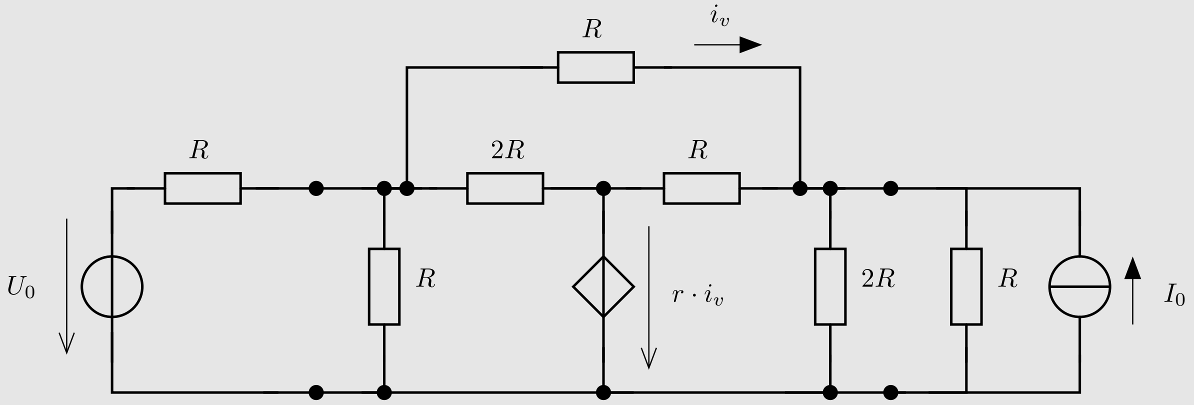
Példák és feladatok az 5-6. gyakorlat anyagából

Reichardt András

2021. március 10. - 2021. március 18.

Példák

Feladat 2. Határozzuk meg az alábbi hálózatban a források teljesítményét!
($r = 4\Omega$, $R = 10\Omega$, $U_0 = 10V$, $I_0 = 0{,}1$ mA)



Megoldás : Csomóponti potenciálokat alkalmazunk (rendre U_0, U_1, $r \cdot i_v$, U_2). Ismeretlenek : U_1, U_2, I_v

$$\frac{U_1 - U_0}{R} + \frac{U_1}{R} + \frac{U_1 - r \cdot I_v}{2R} + \frac{U_1 - U_2}{R} = 0$$

$$-I_0 + \frac{U_2}{R} + \frac{U_2}{2R} + \frac{U_2 - r \cdot I_v}{R} + \frac{U_2 - U_1}{R} = 0$$

$$I_v = \frac{U_1 - U_2}{R}$$

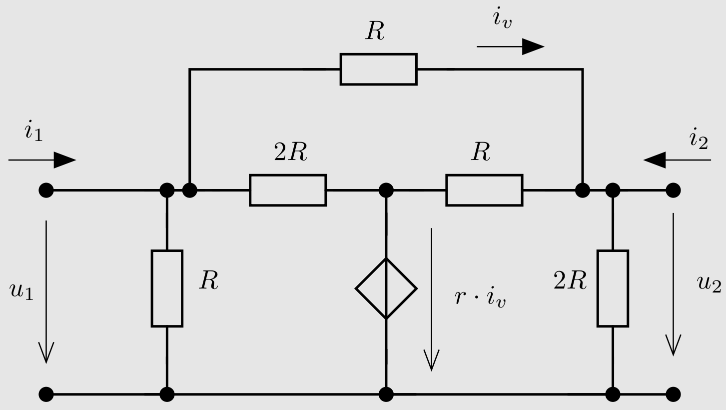
Mátrixosra rendezett alakban :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{R} + \frac{1}{2R} & -\frac{1}{R} & -\frac{r}{2R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{3}{R} + \frac{1}{2R} & -\frac{r}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_0}{R} \\ I_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

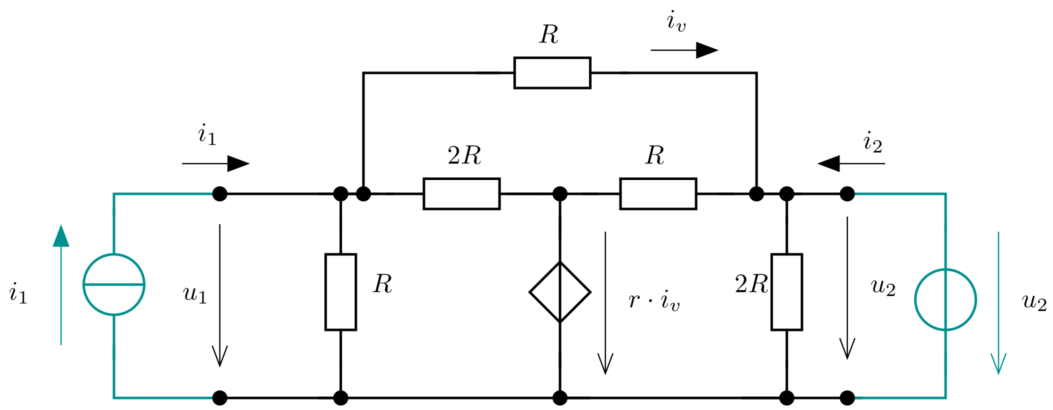
A keresett teljesítményeket a csomóponti potenciálok alapján : $I_{U0} = \frac{U_1 - U_0}{R}$, $U_{I0} = -U_2$, $P_{U0} = U0 \cdot I_{U0}$ és $P_{I0} = I_0 \cdot U_{I0}$

```
U0 = 10;
I0 = 0.1;
R = 10;
r = 4;

A = [3/R+1/(2*R) -1/R -r/(2*R);-1/R 3/R+1/(2*R) -r/R;-1/R 1/R 1]
B = [U0/R;I0;0]
x = A \ B

U1 = x(1); U2 = x(2); iv=x(3);
IU0 = (U1-U0)/R; UI0 = -U2;
PU0 = U0*IU0
PI0 = I0*UI0
```

Feladat 2/b. Határozzuk meg a középső rész (amihez a feszültséggenerátor illetve az áramgenerátor kapcsolódik, lásd az alábbi ábrán), kétkapu helyettesítő képének H (hibrid) karakterisztikájának mátrixát!



Megoldás : A karakterisztika mátrixának elemeit egy lépésben fogjuk elvégezni. A független változóknak megfelelő forrásokkal zárjuk le a kétkapu mindkét oldalát. A primer oldalra áramforrást (i_1), a szekunder oldalra feszültségforrást (u_2) csatlakoztatunk, az alábbi ábrának megfelelő módon.



A korábbi módon felvett csomóponti potenciálokat alkalmazva az alábbi egyenletrendszer adódik (ismeretlenek: u_1, i_2, i_v, források: i_1, u_2) :

$$\left.\begin{aligned} -i_1 + \frac{u_1}{R} + \frac{u_1 - r \cdot i_v}{2R} + \frac{u_1 - u_2}{R} &= 0 \\ -i_2 + \frac{u_2}{2R} + \frac{u_2 - r \cdot i_v}{R} + \frac{u_2 - u_1}{R} &= 0 \\ i_v &= \frac{u_1 - u_2}{R} \end{aligned}\right\}$$

Amelyet mátrixos alakra rendezünk. A jobb oldalon a több forrás miatt ugyancsak mátrixos elrendezést alkalmazunk.

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2R} & 0 & -\frac{r}{2R} \\ -\frac{1}{R} & -1 & -\frac{r}{R} \\ -\frac{1}{R} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \\ i_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 + \frac{u_2}{R} \\ -u_2 \cdot \frac{5}{2R} \\ -\frac{u_2}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{R} \\ 0 & -\frac{5}{2R} \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Amely egy lineáris (mátrix) egyenlet :

$$\underline{\mathbb{P}} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbb{Q}}} \cdot \underline{\mathbf{s}}$$

Ennek megoldása (balról osztva másképpen balról szorozva $\underline{\mathbb{P}}$ inverzével) :

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbb{P}}}^{1} \cdot \underline{\underline{\mathbb{Q}}} \cdot \underline{\mathbf{s}}$$

```
%% H karakterisztika kiszamitasa
% x = [u1, i2, iv]; s = [i1;u2]
P = [2/R+1/(2*R) 0 -r/(2*R);-1/R -1 -r/R;-1/R 0 1]
Q = [1 1/R;0 -(2/R+1/(2*R));0 -1/R]
x = inv(P)*Q
H = x(1:2,1:2)
```

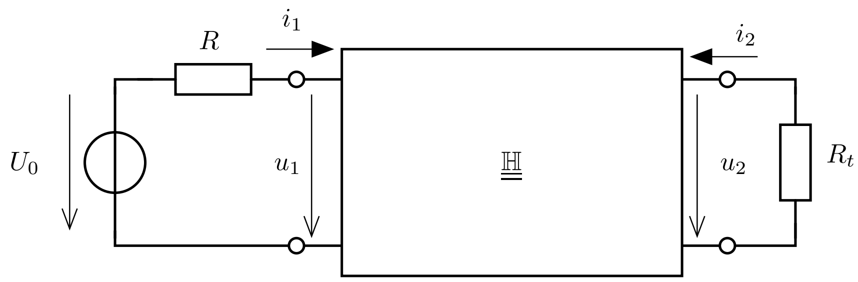
Ennek alapján (koherens egységrendszer : V, A, Ω)

$$\underline{\underline{\mathbb{H}}} = \begin{pmatrix} 4{,}3478\Omega & 0{,}3478 \\ -0{,}6087 & 0{,}2413S \end{pmatrix}$$

Feladat 3. Ismerjük a kétkapu H-karakterisztikáját. Határozzuk meg a primer oldalon feszültséggenerátorral ($U_0 = 10V$, $R = 10\Omega$), szekunder oldalon $R_t = 10\Omega$ terheléssel lezárt kétkapu esetén a kétkapu feszültségeit és áramait!

$$\underline{\underline{\mathbb{H}}} = \begin{pmatrix} 4{,}3478\Omega & 0{,}3478 \\ -0{,}6087 & 0{,}2413S \end{pmatrix}$$

Megoldás : A feladat leírása alapján a hálózat az alábbi módon állítható elő :



A 4 ismeretlenre vonatkozóan felírható egyenletek az alábbiak (2 egyenlet a kétkapu karakterisztikából adódik, 1-1 egyenlet a primer illetve szekunder oldali lezárásra vonatkozóan írható fel) :

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= H_{11} \cdot i_1 + H_{12} \cdot u_2 \\ i_2 &= H_{21} \cdot i_1 + H_{22} \cdot u_2 \\ i_1 + \frac{u_1 - U_0}{R} &= 0 \\ u_2 &= (-i_2) \cdot R_t \end{aligned}\right\}$$

amely mátrixos alakban

$$\begin{pmatrix} 1 & -H_{12} & -H_{11} & 0 \\ 0 & -H_{22} & -H_{21} & 1 \\ 1 & 0 & R & 0 \\ 0 & 1 & 0 & R_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

módon írható fel, és a Matlab-os megoldása az alábbi kódot eredményezi.

```
%% H ismereteben az Rt=10 lezaras megoldasa
%
U0 = 10; R = 10; Rt =10;
A = [1 -H(1,2) -H(1,1) 0;0 -H(2,2) -H(2,1) 1;1 0 R 0;0 1 0 Rt]
B = [0;0; U0;0]
X = A \ B
Pt = X(2)*(-X(4))
```

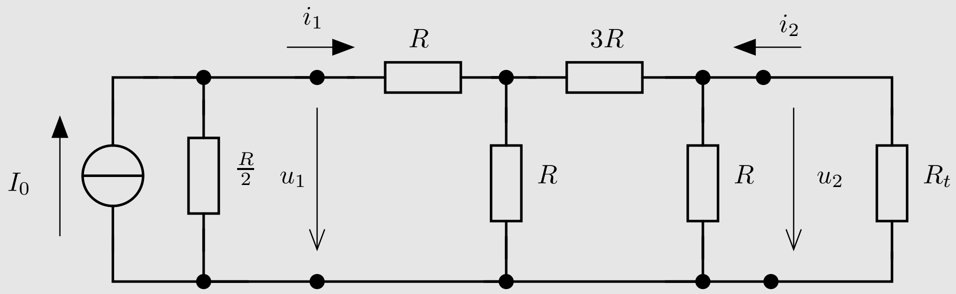
Kapott eredményünk (az `x` változó megleleő értékei alapján)

$$u_1 = 3{,}3191V; \quad u_2 = 1{,}1915V; \quad i_1 = 0{,}6681A; \quad i_2 = -0{,}1191A$$

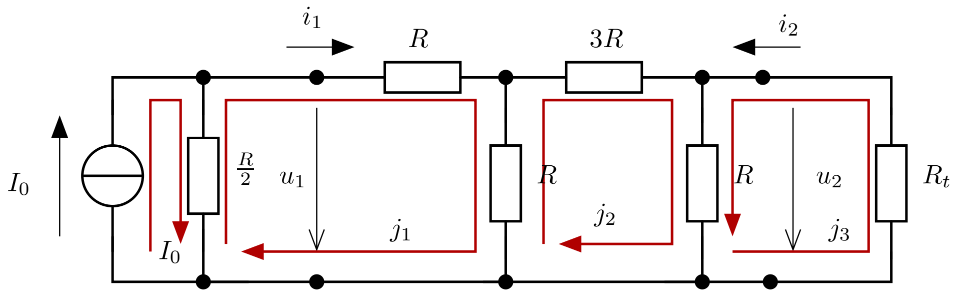
Megjegyzés Egyrészről ebben az esetben a kétkapu nem egy bonyolult hálózatot helyettesít, azonban az elemszám növelésével gyorsan nő az ismeretlenek száma, amelyekre az eredeti modellt kellene megoldani. (Akár többször/sokszor is megoldandó, ha a gerjesztés illetve a lezárás változik.) A kétkapu leírással a megoldandó probléma bonyolultsága nem változik.

Másrészről egy valódi objektumról sokszor csak a mérésekkel "előállítható" karakterisztika adódik, amelyet egy kétkapu karakterisztikájának (paramétertől függő) együtthatóival lehet leírni. Ekkor csak az ilyen módon megoldott hálózati modell alkalmazható.

Feladat 4. Az alábbi hálózatban $R = 2{,}97k\Omega$, $I_0 = 2$ mA és $R_t = 4R$. Adjuk meg a hálózatban szereplő kétkapu G illetve R karakterisztikáját! Határozzuk meg a kétkapu karakterisztikák ismeretében illetve annak használata nélkül a terhelő ellenállás teljesítményét!



Megoldás Számítsuk ki a terhelés teljesítményét a kétkapu alkalmazása nélkül. Alkalmazzunk hurokáramok módszerét, az alábbi hurokrendszerrel!



$$\left.\begin{aligned} (j_1 - I_0)\frac{R}{2} + j_1R + (j_1 - j_2)\cdot R = 0 \\ (j_2 - j_1)\cdot R + 3R\cdot j_2 + R(j_2 + j_3) = 0 \\ R_t j_3 + R(j_3 + j_2) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5R}{2} & -R & 0 \\ -R & 5R & R \\ 0 & R & R + R_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \cdot \frac{R}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A kapott eredmények

$$j_1 = 0{,}4364mA, \qquad j_2 = 0{,}0909mA, \qquad j_3 = -0{,}0182mA$$

alapján a keresett teljesítmény :

$$p_t = (-j_3)\cdot R \cdot (-j_3) = 0{,}0039mW.$$

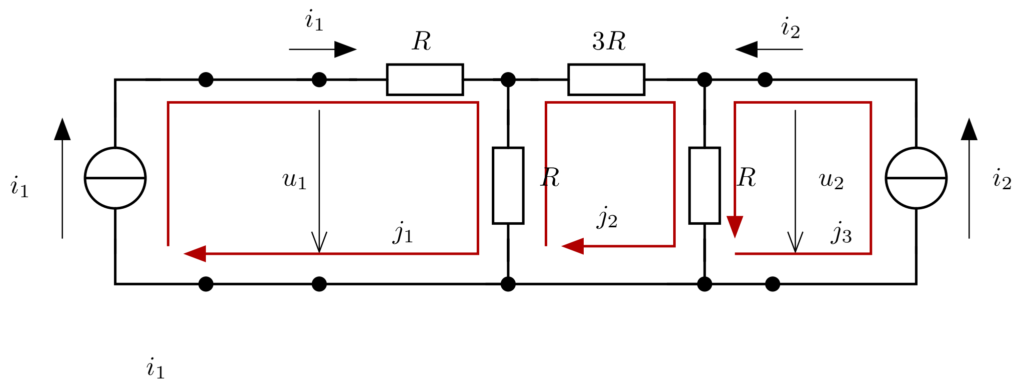
A forrás teljesítménye (habár nem volt a feladat kérdése) :

$$U_{I0} = -(I_0 - j_1)\cdot\frac{R}{2} = -2{,}322V, \qquad \text{és} \qquad P_{I0} = -4{,}644mW$$

A számítást végző Matlab-kód :

```
% kOhm, mA, V koherens egysegrendszer
R = 2.97;
I0 = 2;
Rt = 4*R;

A = [5*R/2 -R 0;-R 5*R R;0 R R+Rt];
B = [I0*R/2;0;0];
x =  A \ B;
j1= x(1); j2=x(2); j3 = x(3);

%% keresett mennyisegek kiszamitasa
ut = (-j3)*Rt;
it = (-j3);
pt = ut*it
uI0 = -(I0-j1)*R/2;
PI0 = I0*uI0
```

Másik megközelítés : Számítsuk ki először a kétkapu karakterisztikát, majd ennek segítségével a választ! A kétkaput zárjuk le mindkét oldalon egy-egy áramforrással!



A hurokáramok használatával az alábbi egyenletrendszer adódik, amelynek megoldásával adódik a keresett impedancia karakterisztika, mert a hurokrendszert olyan módon vettük fel, hogy $i_1 = j_1$ és $i_2 = j_3$ megfelelések legyenek. A két áramforrás által meghatározott hurokra is fel kell írni a huroktörvényt, figyelembe véve u_1 valamint u_2 irányát (ezek lesznek valamilyen értelemben az áramforrások feszültségei).

$$\left.\begin{aligned} -u_1 + R \cdot i_1 + R \cdot (i_1 - j_2) = 0 \\ R \cdot (j_2 - i_1) + 3R \cdot j_2 + R \cdot (j_2 + i_2) = 0 \\ -u_2 + R \cdot (i_2 + j_2) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & R \\ 0 & 1 & -R \\ 0 & 0 & 5R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2R & 0 \\ 0 & R \\ R & -R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ j_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 9R & R \\ R & 4R \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Ebből kiolvasva az impedancia karakterisztikát :

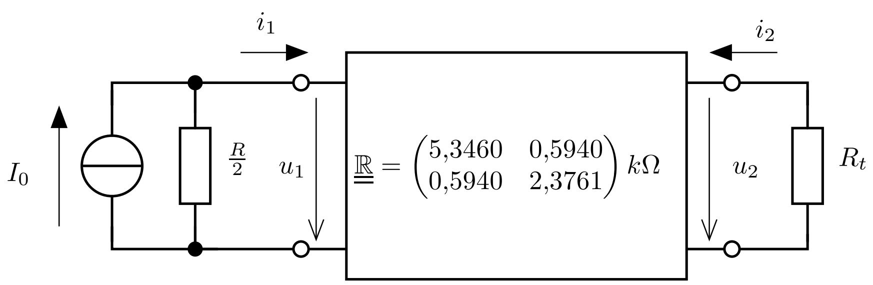
$$\boxed{\underline{\underline{\mathbb{R}}} = \frac{R}{5} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

Az admittancia karakterisztika esetében felhasználhatjuk a most kiszámított impedancia karakterisztikát

$$\underline{\underline{\mathbb{G}}} = \underline{\underline{\mathbb{R}}}^{-1} = \begin{pmatrix} 9R/5 & R/5 \\ R/5 & 4R/5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7R^2/5} \cdot \frac{R}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7R & -1/7R \\ -1/7R & 9/7R \end{pmatrix}$$

vagy a hálózatból is kiszámíthatjuk oly módon, hogy feszültségforrás lezárást alkalmazunk mindkét oldalon. Ennek elvégzését az olvasóra bízzuk.

Az impedancia karakterisztika ismeretében a gerjesztett esetet vizsgáljuk meg!



Ahol az impedancia karakterisztika együtthatói

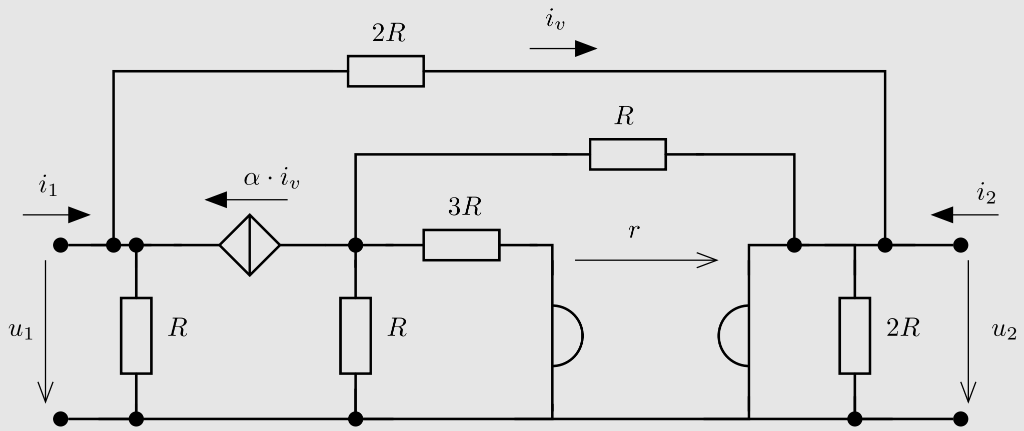
$$\underline{\underline{\mathbb{R}}} = \frac{R}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5{,}3460 & 0{,}5940 \\ 0{,}5940 & 2{,}3761 \end{pmatrix} k\Omega$$

A karakterisztika és a kétoldali lezárások egyenletei :

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R_{11}\cdot i_1 + R_{12}\cdot i_2 \\ u_2 &= R_{21}\cdot i_1 + R_{22}\cdot i_2 \\ -I_0 + \frac{u_1}{R/2} + i_1 &= 0 \\ u_2 &= -i_2\cdot R_t \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & \cdot & -R_{11} & -R_{12} \\ \cdot & 1 & -R_{21} & -R_{22} \\ \dfrac{2}{R} & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & R_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ I_0 \\ \cdot \end{pmatrix}$$

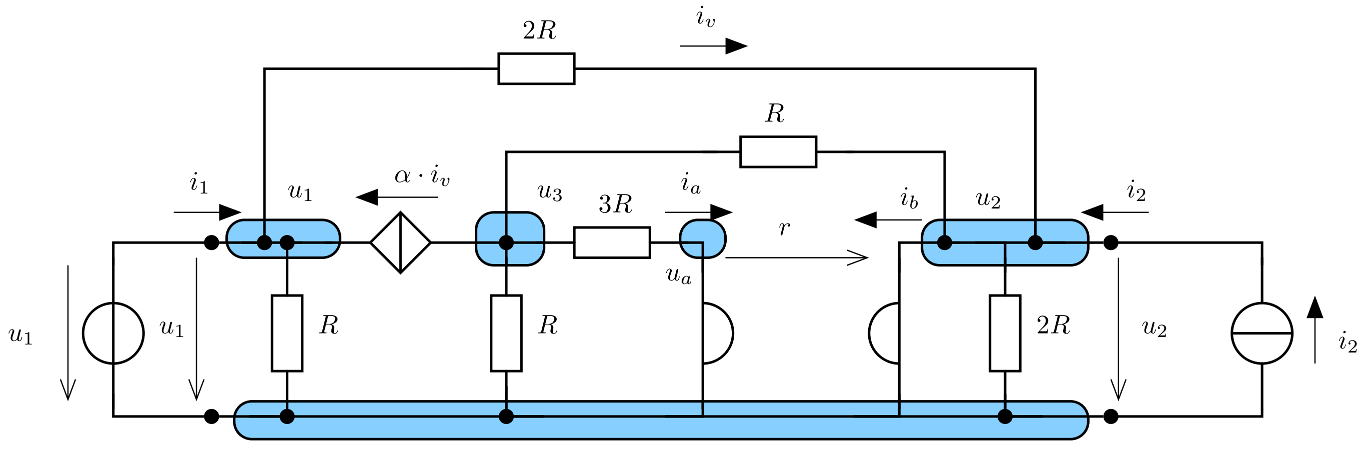
```
% kOhm, mA, V koherens egysegrendszer
R = 2.97;
I0 = 2;
Rt = 4*R;

% R karakterisztika szamitasa
P = [1 0 R;0 1 -R;0 0 5*R];
Q = [2*R 0;0 R;R -R];
PQ = inv(P)*Q;
RR = PQ(1:2,1:2)

% u2 es i2 kiszamitasa
A = [1 0 -RR(1,1) -RR(1,2);0 1 -RR(2,1) -RR(2,2);2/R 0 1 0;0 1 0 Rt]
B = [0;0;I0;0]
x = A \ B
ut = x(2);
it = -x(4);
pt = ut*it
PI0 = (-x(1))*I0
```

Feladat 5. Egy összetettebb hálózatot mutat az alábbi ábra. Határozzuk meg az inverz hibrid karakterisztikát!



A hálózati paraméterek értékei az alábbiak : $r = 1{,}75k\Omega$; $R = 1{,}8k\Omega$; $\alpha = 0{,}5$;

Megoldás Használjunk csomóponti potenciálokat az alábbi ábrán látható módon, ahol a karakterisztikának megfelelő forrásokkal zártuk le a kétkapu mindkét oldalát! A girátor primer oldalának feszültsége u_a, árama i_a. Szekunder oldalának árama i_2, a feszültsége a kétkapu szekunder feszültségével egyezik meg, ezért $u_b = u_2$.



$$
\left.
\begin{aligned}
-i_1 + \frac{u_1}{R} - \alpha \cdot i_v + \frac{u_1 - u_2}{2R} &= 0 \\
-i_2 + \frac{u_2}{2R} + i_b + \frac{u_2 - u_1}{2R} + \frac{u_2 - u_3}{R} &= 0 \\
\alpha i_v + \frac{u_3}{R} + \frac{u_3 - u_a}{3R} + \frac{u_3 - u_2}{R} &= 0 \\
\frac{u_a - u_3}{3R} + i_a &= 0 \\
u_a &= -r \cdot i_b \\
u_2 &= r \cdot i_a \\
i_v &= \frac{u_1 - u_2}{2R}
\end{aligned}
\right\}
$$

Ez mátrixos alakra átírva (a pontok a zérusokat jelölik a mátrixokon belül) :

$$
\begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{2R} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha \\
\cdot & \frac{2}{R} & -\frac{1}{R} & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & -\frac{1}{R} & \frac{7}{3R} & -\frac{1}{3R} & \cdot & \cdot & \alpha \\
\cdot & \cdot & -\frac{1}{3R} & \frac{1}{3R} & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & r & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & -r & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{2R} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
i_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_a \\ i_a \\ i_b \\ i_v
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\frac{3}{2R} & \cdot \\
\frac{1}{2R} & 1 \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\frac{1}{2R} & \cdot
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
u_1 \\ i_2
\end{pmatrix}
$$

Az egyenletrendszer összeállítása és megoldása a G karakterisztika esetében az alábbi kódon látható :

Listing 1. Admittancia (G)-karakterisztika kiszámítása

```
r = 1.75; R = 1.8; alfa = 0.5;
% G - karakterisztika
P = [1 0 0 0 0 0 alfa;0 1 1/R 0 0 -1 0;...
  0 0 7/(3*R) -1/(3*R) 0 0 alfa;0 0 -1/(3*R) 1/(3*R) 1 0 0;...
  0 0 0 1 0 r 0;0 0 0 0 r 0 0;0 0 0 0 0 0 2*R];
Q = [3/(2*R) -1/(2*R);-1/(2*R) 2/R;0 1/R;0 0;0 0;0 1;1 -1];
X = P\Q
GG = X(1:2,1:2)
```

Az R karakterisztika esetében látható az alábbi kódrészleten :

Listing 2. Impedancia (R)-karakterisztika kiszámítása

```
%% Impedancia karakterisztika
PR = [3/(2*R) -1/(2*R) 0 0 0 0 -alfa;-1/(2*R) 2/R -1/R 0 0 1 0;...
  0 -1/R 7/(3*R) -1/(3*R) 0 0 alfa;0 0 -1/(3*R) 1/(3*R) 1 0 0;...
  0 0 0 1 0 r 0;0 1 0 0 -r 0 0;-1 1 0 0 0 0 2*R];
QR = [1 0;0 1;0 0;0 0;0 0;0 0;0 0];
X = PR\QR
RR = X(1:2,1:2)
%% Ellenorzes
% A G inverze R-et kell adjon
inv(GG)
```