Szinuszos megoldás számítógéppel

Reichardt, András

2023. június 6.

1. Általános meggondolások

Szinuszos gerjesztésre (több különböző frekvencián egyszerre) adott választ szeretnénk meghatározni. Ennek segítségével a teljesítményviszonyokról is tudunk mondani érdemlegeset. Emellett a kialakuló választ időtartományban is ábrázoljuk.

A teljes kurzus végső céljaként lebeghet ez a feladat a szemünk előtt. Jelen kurzus során a periodikus jel Fourier-sorának meghatározása nem célünk, ezen felbontást adottnak tekintjük.

Ez a jegyzet valamilyen szinten kiegészítő jellegű a gyakorlathoz, mert egy olyan módszert ismertet, amely a valós mérési problémákkal mutat hasonlóságot. A megoldás lépései az alábbiak.

1. Áttérünk frekvenciatartománybeli leírásra. A dinamikus elemeket (az időbeli differenciálásból adódó $j\omega$-val történő szorzás alapján) $Z_L = j\omega L$ illetve $Z_C = 1/j\omega C$ impedanciákkal helyettesítjük.

2. A komplex jelölésmódot úgy alkalmazzuk, hogy az egyes jelek komplex amplitúdója a frekvencia (ω) függvényeként adottnak tekinthető. (Azaz pl. a gerjesztésnél ismerjük a különböző frekvenciákon az adott frekvenciaösszetevő súlyát (amplitúdó) és fázisát.) A keresett mennyiségek is ilyen értelemben vett komplex amplitúdóval jellemzettek.

3. Az átviteli karakterisztikát meghatározzuk.

4. A gerjesztésben szereplő, nem-zérus együtthatók esetére a válasz komplex ampliutúdóját is kiszámítjuk.

5. Az egyes frekvenciák esetében adódó időfüggvényeket adjuk össze.

A vizsgán szereplő esetekben az átviteli karakterisztika "egyszerűen" meghatározható az egyenletek alapján. Olyan mintha a házi feladathoz a symbolic toolbox segítségével dolgoznánk (lásd 2). Ennek létjogosultság csak viszonylag alacsony elemszám (pl. 2-5) esetén van. Ennél magasabb esetben más módszerhez kell nyúlni.

Jelen jegyzet esetén azonban úgy fogunk tekinteni a gerjesztésre mint különálló szinuszos gerjesztésekre, amelyek esetében a válasz-gerjesztés összefüggés meghatározható. Ezen összefüggés az átviteli tényező (komplex szám), amely egy adott frekvencián köti össze a válasz komplex amplitúdóját és a gerjesztés komplex amplitúdóját. A minket érdeklő teljes frekvenciatartomány tetszőleges számú pontjában meg tudjuk határozni az átviteli tényezőt, amely a keresett pontossággal (pontszámban) írja le az átviteli karakterisztikát (3).

Ez a numerikus módszer nagyban hasonlít a valós mérési elrendezésekre. Ott a gerjesztés egy függvénygenerátor segítségével történik, amely frekvencia sweep-et (söprés) képest végrehajtani. A lezárás oldalán egy multiméter, oszcilloszkóp vagy egyéb mérőműszer segítségével mérjük a kimeneti mennyiséget. A jelenkori számítógéppel vezérelt mérések esetében ez az elrendezés igen általánosnak mondható.

2. Szimbolikus megoldás meghatározása számítógéppel

A frekvenciatartományban tudjuk megoldani a feladatot. A cél a válasz és a gerjesztés közötti összefüggés meghatározása a különböző frekvenciákon egyszerre történő gerjesztés hatására kialakuló válasz alapján. Lineáris hálózatok esetében (független forrásokon kívűl minden elem lineáris) a válasz-gerjesztés összefüggés az átviteli karakterisztika.

Az átviteli karakterisztika zárt alakú meghatározására az alábbi módszert alkalmazzuk.

1. Áttérünk frekvenciatartományba, azaz komplex jelölésmódra. A tekercsek és kondenzátorok helyére impedanciákat helyezünk, ahol a $j\omega$-t paraméternek tekintjük.

2. Felírjuk a megfelelő egyenleteket a választott módszerhez kapcsolódóan (hurokáramok és csomóponti potenciálok is komplex értékűek).

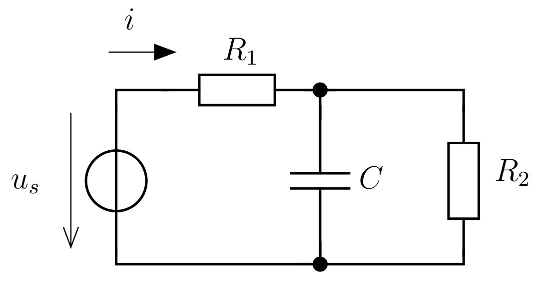
3. Az előbbi egyenletrendszer megoldásával a keresett mennyiségeket kifejezzük a - most már ismert értékű - hurokáramok illetve potenciálok segítségével.

4. Az átviteli karakterisztikát normál alakra hozzuk. (Ebből sokféle létezik, de ebben az esetben azt célszerű alkalmazni, amelynél a nevező (és a számláló) legmagasabb fokú tagjának együtthatója 1.

A kézzel végzett számítások során a szokásos módon lehet eljárni az egyenletrendszer megoldásánál. A számítógéppel segített esetben a symbolic toolbox (vagy valami hasonló) alkalmazása a célravezető. A megoldás során a $j\omega$ kifejezését egyben kell tartani, azaz egyetlen szimbólumként definiálni, mert ennek polinomjai fognak megjelenni. Emellett önmagában a j és az ω sem jelenik meg, hanem csak együtt.

2.1. QZZ756 hálózat

Határozzuk meg az átviteli karakterisztikát az alábbi esetre, ahol a válasz a bejelölt i áram, a gerjesztés a feszültségforrás feszültsége.



Megoldás : A keresett mennyiségek közötti összefüggés lényegében a forrásra kapcsolt kétpólus admittanciája.

$$Y = \frac{I}{U_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{Z_C} \times \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + j\omega C \times \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{j\omega C}{1 + j\omega R_2 C} =$$

$$= \frac{(1 + j\omega R_2 C) + j\omega R_1 C|}{R_1(1 + j\omega R_2 C)} = \frac{(R_1 + R_2)C}{R_1 R_2 C} \cdot \frac{j\omega + \frac{1}{C(R_1+R_2)}}{j\omega + \frac{1}{R_2 C}} \quad (1)$$

Másik módszer, ha csomóponti potenciálokkal dolgozunk. A kondenzátor felső pontja legyen U potenciálú, alsó csomópontja 0. A felírható egyenletek az alábbiak :

$$\frac{U}{R_2} + j\omega \cdot CU + \frac{U - U_s}{R_1} = 0 \text{ és } I_1 = \frac{U_s - U}{R_1}$$

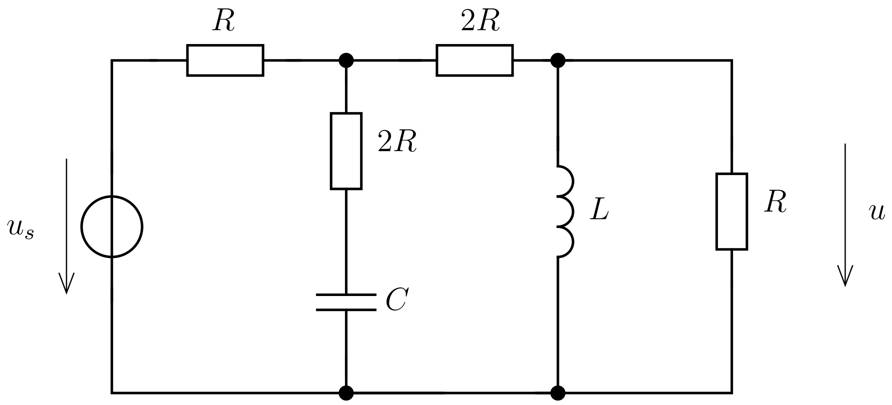
```
syms R1 R2 U Us I1 jw C
eq1 = jw*C*U+U/R2+(U-Us)/R1 == 0;
eq2 = I1 == (Us-U)/R1;
sol = solve([eq1,eq2], [I1,U]);

pretty( simplify( collect( sol.U/Us, [jw])))
pretty( simplify( collect( sol.I1/Us, [jw])))
```

Ebben az esetben is az előző megoldással azonos eredményre jutottunk.

2.2. UTB068

Az alábbi hálózat esetében a válasz a bejelölt u feszültség.



Legyen az alsó csomópont potenciálja zérus, a felső csomópontoké pedig balról jobbra U_s, U_v és U.

A csomóponti egyenletek az alábbiak

$$\left.\begin{aligned} \frac{U_v - U_s}{R} + \frac{U_v}{2R + \frac{1}{j\omega\ C}} + \frac{U_v - U}{2R} &= 0 \\ \frac{U}{R} + \frac{U}{j\omega\ L} + \frac{U - U_v}{2R} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

amelyeket szimbolikus alakra fordíthatunk az alábbi módon

```
clear
syms Us Uv U R jw C L
eq1 = (Uv-Us)/R+Uv/(2*R+1/(jw*C))+(Uv-U)/(2*R) == 0;
eq2 = U/R + U/(jw*L)+(U-Uv)/(2*R) == 0;
sol = solve( [eq1, eq2], [U,Uv]);

pretty( simplify( collect( sol.U/Us, [jw])))
```

Ennek kimenete

```
                         2
          2 C L R jw   + L jw
--------------------------------------
           2          2
11 C L R jw   + (8 C R   + 4 L) jw + 3 R
```

Értelmezve a kaptt eredményt adódik az átviteli karakterisztikára

$$H(j\omega) = \frac{2CLR \cdot (j\omega)^2 + L \cdot j\omega}{11CLR \cdot (j\omega)^2 + (8CR^2 + 4L)j\omega + 3R}$$

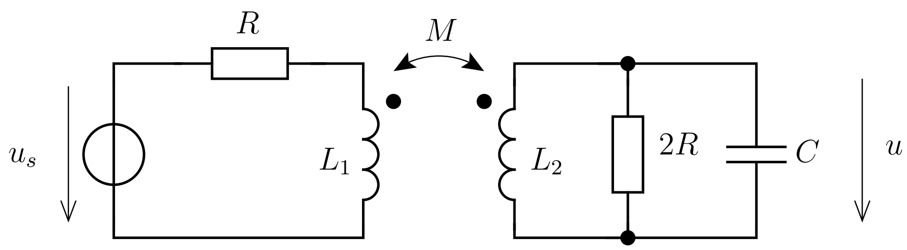
Ezt még át kell alakítani normálalakra (ügyelve a kiemelés során adódó tagokra) :

$$H(j\omega) = \frac{2CLR}{11CLR} \cdot \frac{(j\omega)^2 + j\omega\frac{1}{2CR}}{(j\omega)^2 + \left(\frac{8R}{11L} + \frac{4}{11CR}\right)j\omega + \frac{3}{11LC}}$$

2.3. LNJ882

Az alábbi hálózat esetében egy csatolt tekercspár is szerepel. A problémát (legfeljebb) ennek kezelése jelentheti. A csatolás ténye csak az egyenletek bonyolultságában (egymással összefonódottabbak) jelenik meg, a dinamikus elemek száma nem változik általa. A csatolás pöttyei a csatolt indukálás feszültségének felső csomópontját jelentik (illetve a csatolás során az áram pozitív irányát - pöttytől folyik az áram).

Határozzuk meg a rendszer átviteli karakterisztikáját, ha válasz a kondenzátor (bejelölt) feszültsége, gerjesztése a feszültségforrás feszültsége.



Ebben az esetben célszerű a hurokáramok módszerének alkalmazása. Az első két hurokáram (I_1 és I_2) a pöttytől lefelé folyik, míg a harmadik (I_3) a kondenzátoron folyik lefelé. Az alábbi hurokegyenletek írhatóak fel :

$$\left.\begin{aligned} -U_s + R \cdot I_1 + j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 &= 0 \\ j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 + 2R(I_2 + I_3) &= 0 \\ \frac{1}{j\omega C} I_3 + 2R(I_3 + I_2) &= 0 \\ U = I_3 \cdot \frac{1}{j\omega C} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Az egyenletek, paraméterek és változók megadása szimbolikusan :

```
clear
syms Us I1 I2 I3 R L1 L2 M C U jw
eq1 = -Us + R*I1+jw*L1*I1+jw*M*I2 == 0;
eq2 = jw*L2*I2+jw*M*I1+2*R*(I2+I3) ==0;
eq3 = I3/(jw*C)+2*R*(I3+I2) == 0;
```

```
eq4 = U == I3*1/(jw*C);
sol = solve([eq1,eq2,eq3,eq4], [U,I1,I2,I3]);
pretty( simplify( collect( sol.U/Us, [jw])))
```

Ennek a kimenete már bonyolultabb kell legyen, ahol azonban a nevezőre vonatkozóan megjósolható, hogy harmadfokú polinom kell legyen.

```
                2 M R jw
----------------------------------------------------
                          2     2           2
jw (2 L1 R + L2 R) + jw  (- M  + 2 C L2 R  + L1 L2) +
                           2     3       2
2 R  - jw  (C R M  2 - 2 C L1 L2 R)
```

$$H(j\omega) = \frac{2\,M\,R\cdot j\omega}{(jw)\,2R\cdot(2L_1+L_2)+(j\omega)^2\,(-M^2+2\,C\,L_2\,R^2+L_1\,L_2)+2\,R^2+(jw)^3\,2CR\,(L_1L_2-M^2)}$$

Ami persze láthatóan már elég bonyolult ahhoz, hogy csak a konkrét értékekkel lehessen értelmesen megoldani.

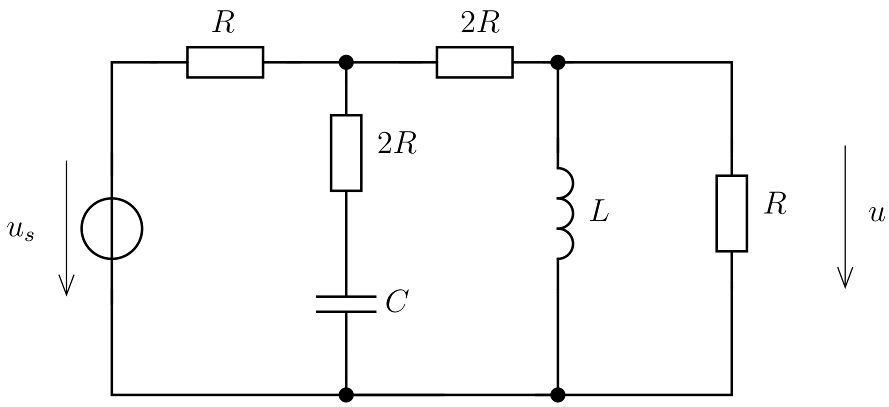
3. Átviteli karakterisztika meghatározása - numerikus megoldás

Ebben a részben a valós mérési módszert imitáló módszerrel fogunk számolni. Az átviteli karakterisztika meghatározása egy valós hálózat esetében méréssel történik.

A gerjesztést egy programozható jelgenerátorral szinuszos jellel gerjesztjük a hálózatot. A válasz mennyiséget valamely mérőműszerrel (pl. digitális multiméterrel mérjük). Ezzel egy mérési sorozat végén egy frekvencia-árviteli karakterisztika adatsort kapunk. Ha valamely frekvenciaértéken nem történt mérés, akkor interpoláció segítségével tudunk az ismert pontokban lévő adatokból következtetni a keresett értékre.

3.1. Részletes megoldás

Az alábbi hálózat esetében számítjuk ki az átviteli karakterisztikát diszkrét frekvenciapontokban végrehajtott (numerikus) mérések segítségével. A numerikus mérés a hálózatelméleti probléma megoldását jelenti, amely bármely mennyiség meghatározható.



A fenti hálózatra vonatkozóan korábban már felírtuk a csomóponti potenciálok egyenletét (2). Ennek megoldását az alábbi Matlab-kód végzi el. A koherens egységrendszer $k\Omega, nF, mH, \mu s, Mrad/s, V, mA$. A később is vizsgált esetre nézve a hálózati paraméterek értéke $R = 2k\Omega$, $C = 0{,}218$ nF, $L = 0{,}63$ mH.

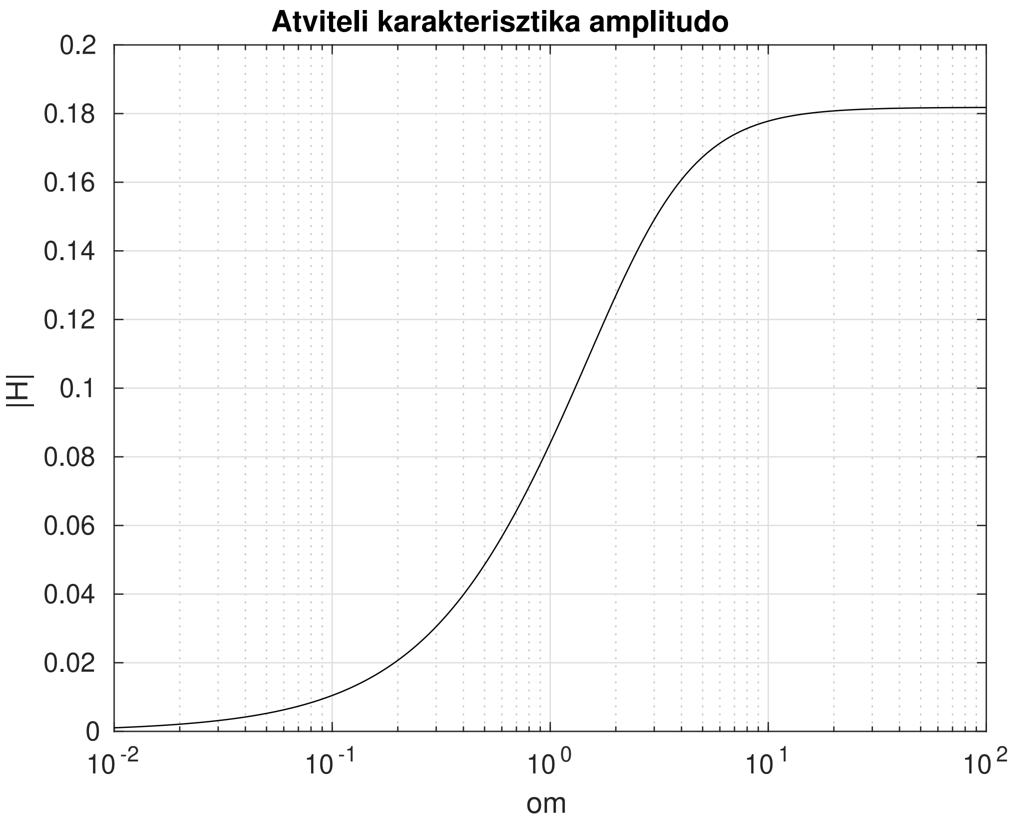
```
function [U,U1] = megoldo(R,L,C,w,Us)
  ZL = j*w*L;
  ZC = 1/(j*w*C);
```

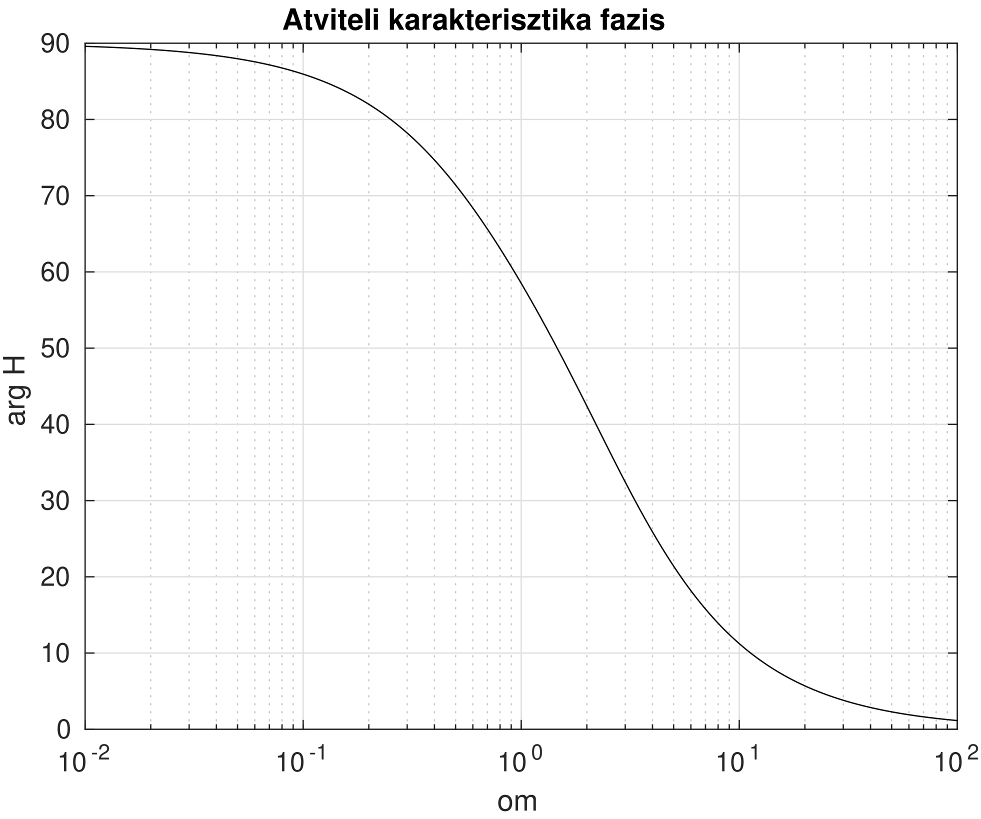
```
  x = [1/R+1/(2*R)+1/(ZC+2*R) -1/(2*R);-1/(2*R) 1/R+1/(2*R)+1/ZL]\[Us/R
      ;0];
  U = x(2); U1=x(1);
end
```

A megoldo függvényei a hálózati elemek paraméterei (R,L,C) és a gerjesztés paraméterei (gerjesztés komplex amplitúdója - Us, működési frekvencia - w). Ennek segítségével az átviteli karakterisztika kiszámítható, ha a gerjesztés amplitúdója mindig 1. Ezzel az amplitúdó és a fázis is a gerjesztéshez képesti lesz.

A numerikus mérés ilyen módon történő megoldása lehetővé teszi számunkra, hogy tetszőleges gerjesztés esetén is működjön ez a módszer.

A mérés eredményeképpen az alábbi átviteli karakterisztika adódik.





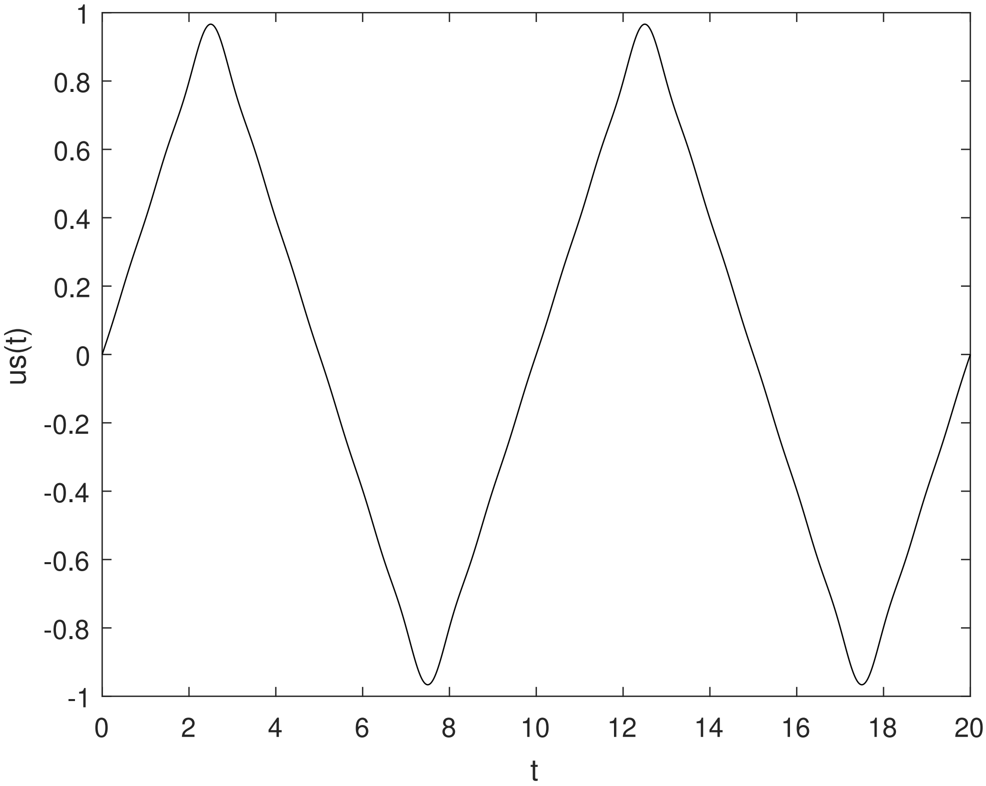
3.2. Válasz számítása fűrészfog gerjesztésnél

Az előző részben elkészített mérési algoritmus felhasználásaként vizsgáljuk meg a háromszög alakú, periodikus gerjesztés hatását.

A periodikus gerjesztést Fourier-sorával írhatjuk le. Ennek meghatározása jelenleg nem feladatunk, annak alakja az alábbi (ahol $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ seg

$$u_s(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\ldots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{k^2} \sin\left(\frac{k \cdot 2\pi \cdot t}{T}\right) \tag{4}$$

A gerjesztés időfüggvénye az első 12 frekvenciakomponens felhasználásával ($k = 0, \ldots, 11$) az alábbi időfüggvény adódik , $T = 10\mu s$ és $1V$ amplitúdó esetén.



A gerjesztés megadása a frekvenciák, amplitúdók és fázisok segítségével történik.

```
T = 10;
om0=2*pi/T;
OM = [1 3 5 7 9 11]*om0;
Us = 8./(pi^2*[1 3 5 7 9 11].^2);
fis = [0 pi 0 pi 0 pi];
Usk = Us.*exp(j*fis);
```

Ennek ismeretében az időfüggvény ($u_s(t)$) kiszámítható megfelelő felbontásban.

$$u_s(t) = \sum_k \hat{U}_k \cdot \cos(\omega_k \cdot t + \varphi_k)$$

```
t = linspace(0,2*T,1000);
ust  = zeros(size(t));
for idx = 1:length(OM)
  ust = ust + Us(idx)*sin(OM(idx)*t+fis(idx));
end
```

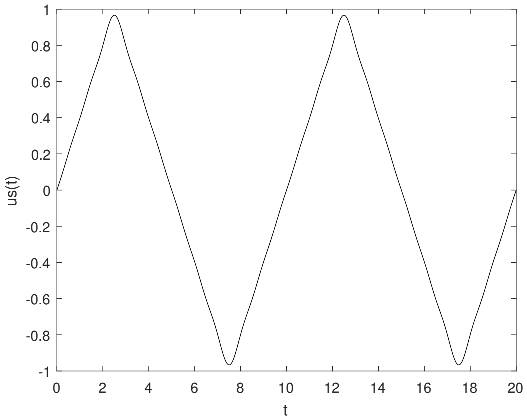
A válasz meghatározására a használt frekvenciákon lépkedünk végig, mindegyik esetében a megfelelő komplex amplitúdóval gerjesztünk és mérjük a választ. A kapott értékeket eltároljuk, hogy a válasz időfüggvényét is kiszámíthassuk.

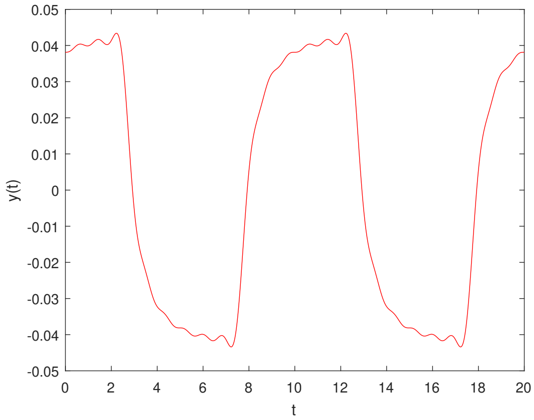
```
for id=1:length(OM)
  U(id) = megoldo(R,L,C,OM(id),Usk(id));
  HH(id)= U(id)/Usk(id);
end
```

A HH mennyiség csak ábrázolástechnikai meggondolások miatt kerül kiszámításra. Az átviteli karakterisztika amplitúdójában jelezzük a gerjesztés frekvenciáit.

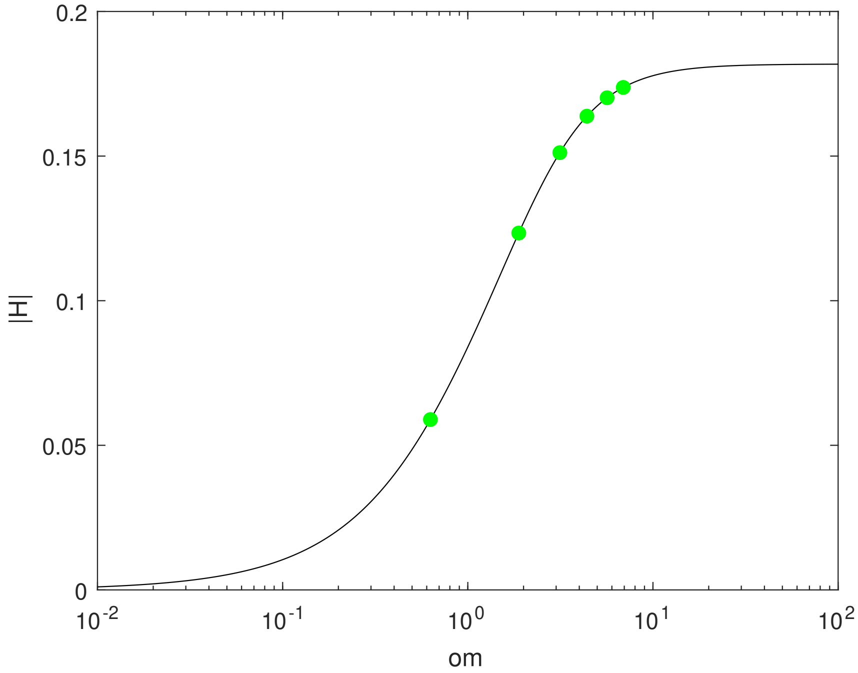
3.2.1. T=10

Figyeljük meg a válasz időfüggvényét $T = 10\ \mu s$ periódusidő esetén! Ábrázoljuk az átviteli karakteriszika amplitúdójával azonos ábrán a gerjesztés által használt frekvenciákat!



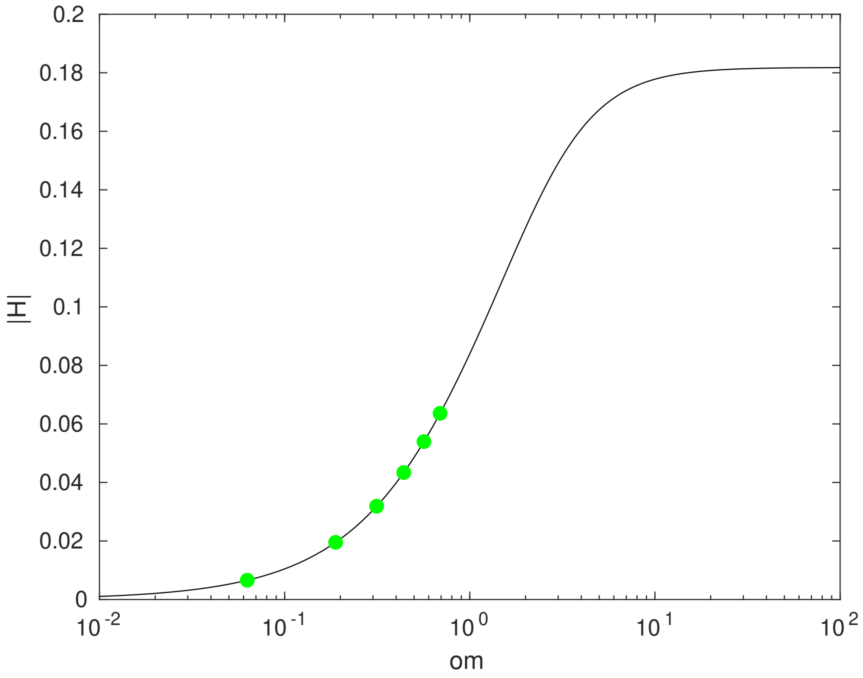


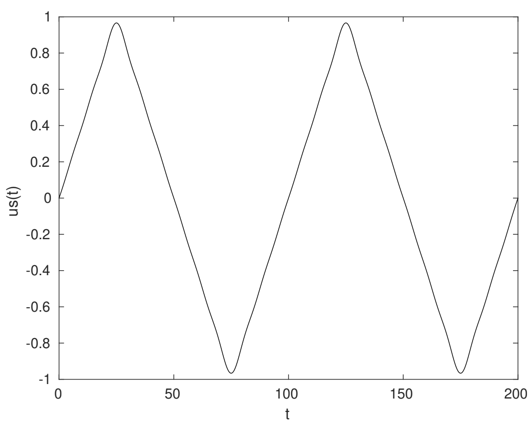
A háromszög alak inkább négyszögjelre hasonlít a válasz időfüggvényében.
A frekvenciamenetet az alábbi ábrán láthatjuk.

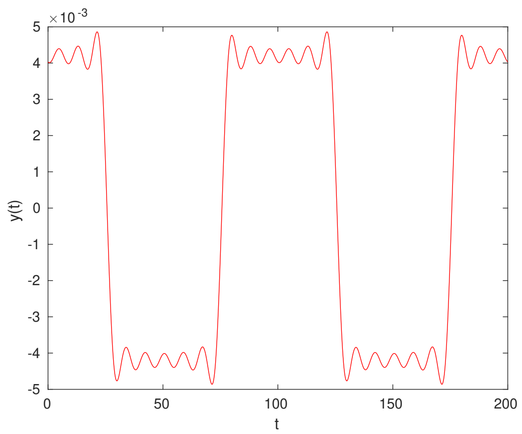


3.2.2. T= 100

A hosszabb periódusidő az alacsonyabb fekvenciákra tolja a felhasznált frekvenciatartományt.

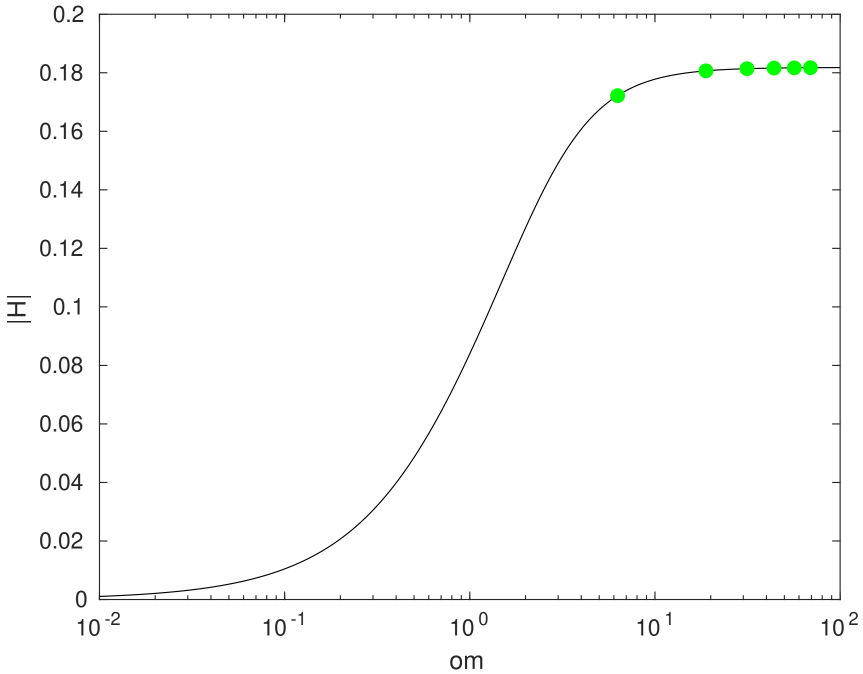


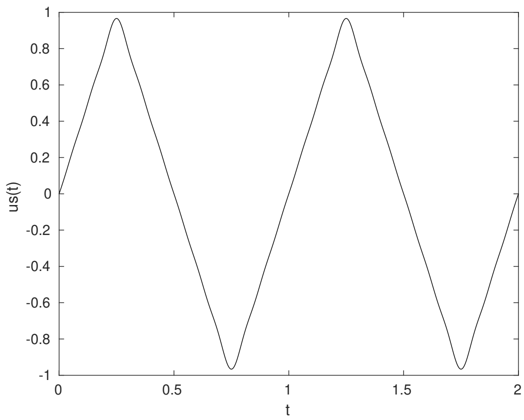


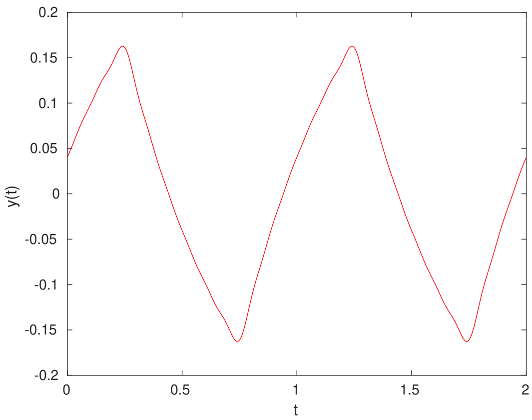


3.2.3. T= 1

Válasszunk rövidebb periódusidőt! Ezzel az alapfrekvencia az eredetihez képest feljebb tolódik. Figyeljük meg ennek hatását!





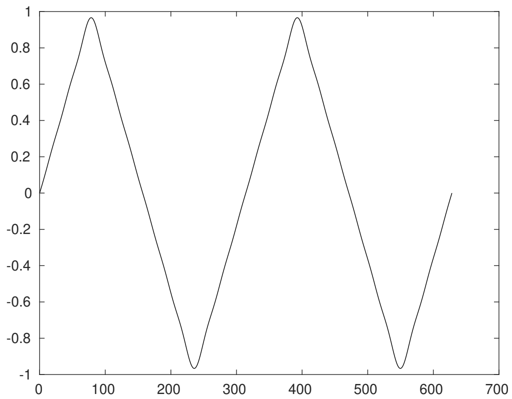


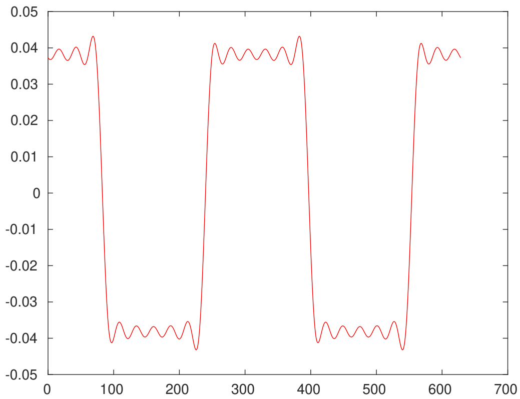
3.3. Nehezebb hálózat

Tekintsük a korábban (2.3) már megismert hálózatot, amelynek leíró egyenletei (3) által adottak. A megoldást a mego.m fájl tartalmazza, a fűrészfog jellegű gerjesztéssel együtt.

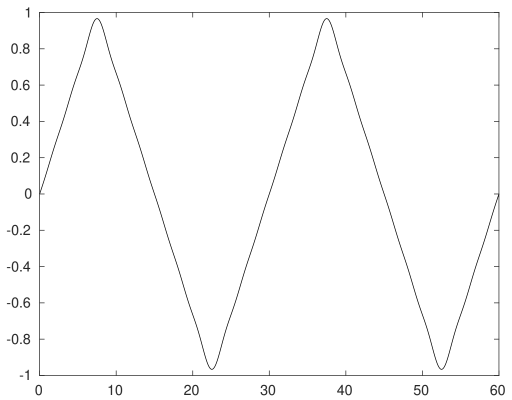
Figyeljük meg a gerjesztésre adott válasz változását 3 különböző alapfrekvencia esetén!

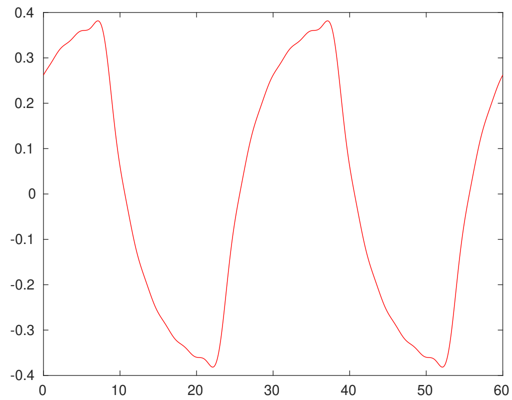
$\omega_0 = 0{,}02$ Mrad/s



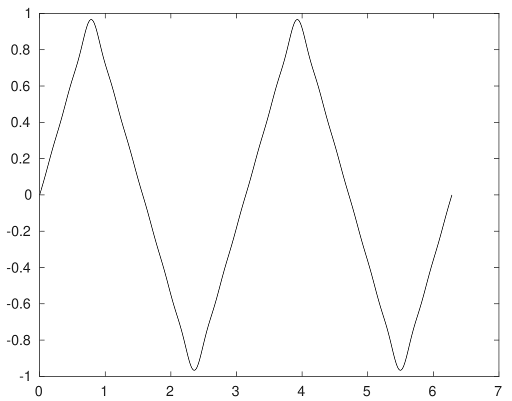


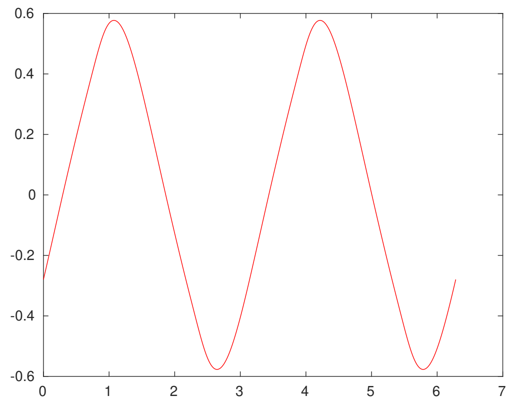
$\omega_0 = 0{,}2$ Mrad/s





$\omega_0 = 2{,}0$ Mrad/s

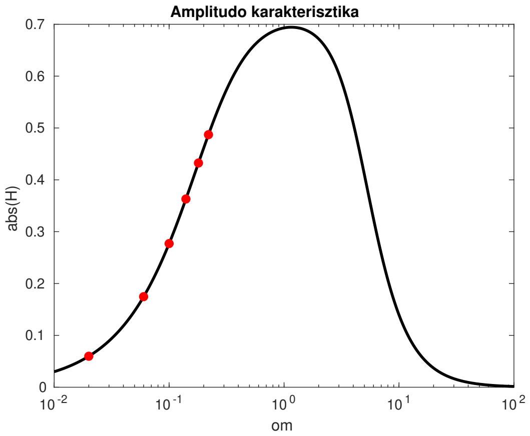


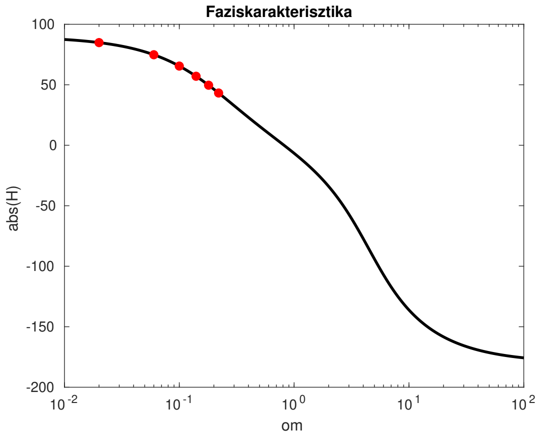


3.3.1. Frekvenciahasználat

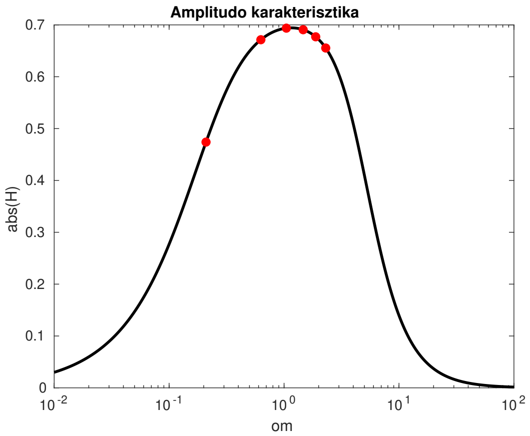
Vizsgáljuk meg az átviteli karakterisztikákat és a használt frekvenciákat!

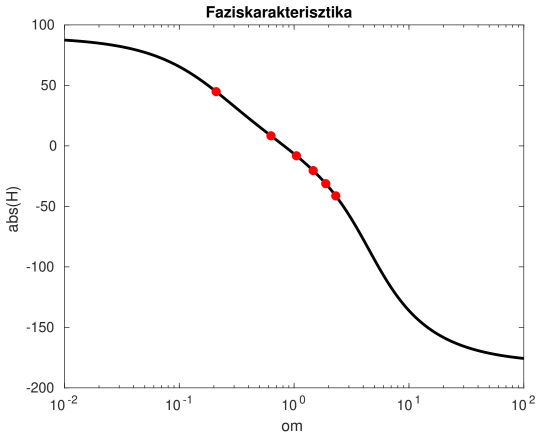
$\omega_0 = 0{,}02$ Mrad/s



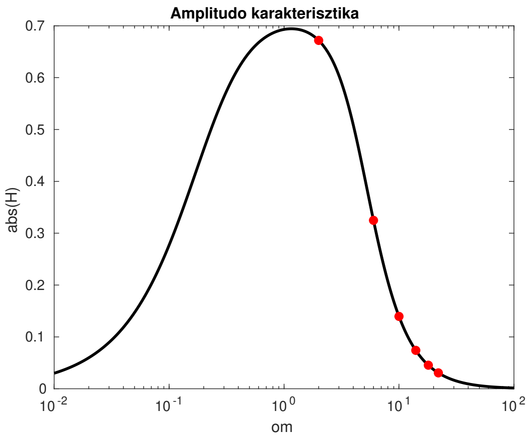


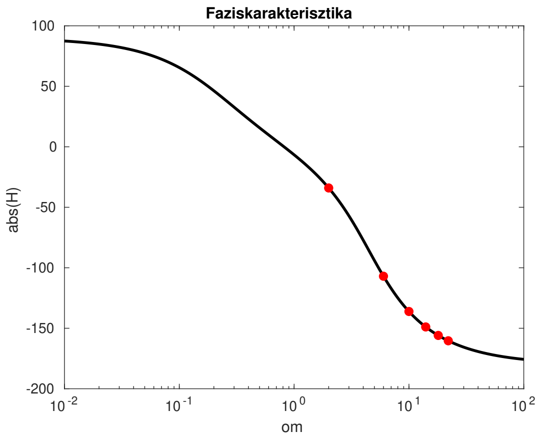
$\omega_0 = 0{,}2$ Mrad/s





$\omega_0 = 2{,}0$ Mrad/s





3.4. Teljes kódok

Listing 1. UTB068 hálózat - átviteli karakterisztika - atvitel.m

```
R = 2;
L = 0.63;
C = 0.218;

om = logspace(-2,2,1e4);
H = zeros(size(om));
for id=1:length(om)
  H(id) = megoldo(R,L,C,om(id),1);
end

%% amplitudo abrazolasa
figure; semilogx(om, abs(H),'k-'); xlabel('om'); ylabel('|H|');
        title('Atviteli karakterisztika amplitudo');
  set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
%% fazis abrazolasa
figure; semilogx(om, 180/pi*angle(H),'k-'); xlabel('om'); ylabel('arg H'
    );
        title('Atviteli karakterisztika fazis ');
  set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');


function [U,U1] = megoldo(R,L,C,w,Us)
  ZL = j*w*L;
  ZC = 1/(j*w*C);
  x = [1/R+1/(2*R)+1/(ZC+2*R) -1/(2*R);-1/(2*R) 1/R+1/(2*R)+1/ZL]\[Us/R
    ;0];
  U = x(2); U1=x(1);
end
```

Listing 2. Fűrészfog alakú gerjesztés hatása - megoldas.m

```
R = 2;
L = 0.63;
C = 0.218;

om = logspace(-2,2,1e4);
H = zeros(size(om));
for id=1:length(om)
  H(id) = megoldo(R,L,C,om(id),1);
end

figure; semilogx(om, abs(H),'k-'); xlabel('om'); ylabel('|H|');

%%

T = 10;
om0=2*pi/T;
OM = [1 3 5 7 9 11]*om0;
Us = 8./(pi^2*[1 3 5 7 9 11].^2);
fis = [0 pi 0 pi 0 pi];
Usk = Us.*exp(j*fis);

for id=1:length(OM)
  U(id) = megoldo(R,L,C,OM(id),Usk(id));
  HH(id)= U(id)/Usk(id);
end

%%
t = linspace(0,2*T,1000);
ust  = zeros(size(t)); yt = zeros(size(t));
for idx = 1:length(OM)
  ust = ust + Us(idx)*sin(OM(idx)*t+fis(idx));
  yt = yt + abs(U(idx))*sin(OM(idx)*t+angle(U(idx)));
end

%%

figure; plot(t,ust,'k-'); xlabel('t'); ylabel('us(t)');
figure; plot(t,yt,'r-'); xlabel('t'); ylabel('y(t)');


%% Gerjesztes frekvenciai az atviteli karakterisztikajaval kozosen

figure; semilogx(om, abs(H),'k-'); xlabel('om'); ylabel('|H|');
  hold on;
  semilogx(OM, abs(HH), 'go','MarkerFaceColor','g');
function [U,U1] = megoldo(R,L,C,w,Us)
  ZL = j*w*L;
  ZC = 1/(j*w*C);
  x = [1/R+1/(2*R)+1/(ZC+2*R) -1/(2*R);-1/(2*R) 1/R+1/(2*R)+1/ZL]\[Us/R
     ;0];
  U = x(2); U1=x(1);
end
```

Listing 3. Fűrészfog alakú gerjesztés hatása - mego.m

```
R = 1;
L1 = 2;
L2 = 5;
M = 3;
C = 0.2;

om = logspace(-2,2,1e4);
H = zeros(size(om));
I1 = zeros(size(om));
I2 = zeros(size(om));
for id=1:length(om)
  [H(id),xt] = megoldo(R,L1,L2,M,C,om(id),1);
  I1(id) = xt(1); I2(id) = xt(2);
end


%%
% T = 30;
% om0=2*pi/T;
om0 = 0.02;
T = 2*pi/om0;
OM = [1 3 5 7 9 11]*om0;
Us = 8./(pi^2*[1 3 5 7 9 11].^2);
fis = [0 pi 0 pi 0 pi];
Usk = Us.*exp(j*fis);

%

for id=1:length(OM)
  U(id) = megoldo(R,L1,L2,M,C,OM(id),Usk(id));
  HH(id)= U(id)/Usk(id);
end

%

t = linspace(0,2*T,1000);
ust  = zeros(size(t)); yt = zeros(size(t));
for idx = 1:length(OM)
  ust = ust + Us(idx)*sin(OM(idx)*t+fis(idx));
  yt = yt + abs(U(idx))*sin(OM(idx)*t+angle(U(idx)));
end


%%
figure; plot(t,ust,'k-')
figure; plot(t,yt,'r-')

%%

figure; semilogx(om, abs(H), 'k-','LineWidth',2);
  xlabel('om'); ylabel('abs(H)'); title('Amplitudo karakterisztika');
  hold on;
  semilogx(OM,abs(HH), 'ro','MarkerFaceColor','r');

figure; semilogx(om, 180/pi*angle(H), 'k-','LineWidth',2);
```

```
  xlabel('om'); ylabel('abs(H)'); title('Faziskarakterisztika');
  hold on;
  semilogx(OM, 180/pi*angle(HH), 'ro','MarkerFaceColor','r');




function [U,x] = megoldo(R,L1,L2,M,C,w,Us)
  x = [R+j*w*L1 j*w*M 0;j*w*M j*w*L2+2*R 2*R;0 2*R 2*R+1/(j*w*C)]\[Us
      ;0;0];
  U = x(3)/(j*w*C);
end
```