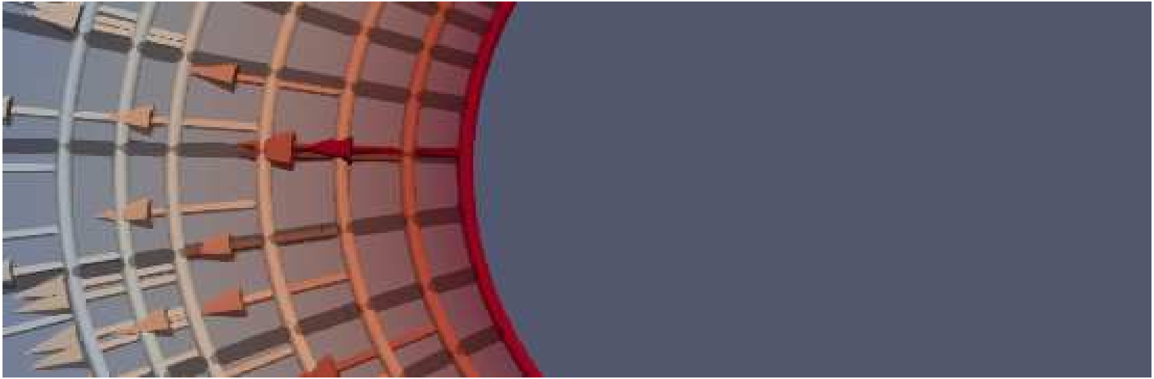
Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék
Antennák és EMC kutatócsoport
NES Laboratórium

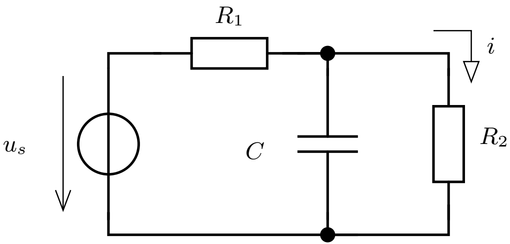
Jelek és rendszerek 2. - 2022. ősz

Feladatok 1. és 2. gyakorlat anyagából

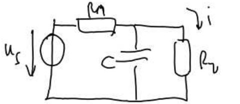


reichardt.andras@vik.bme.hu

Reichardt András | (2022. szeptember 5.)

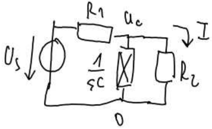


- Határozzuk meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!
- Milyen jellegű rendszert valósít meg (realizál) a hálózat?
- Vázoljuk fel az átviteli karakterisztika frekvenciamenetét!



$H(j\omega) = ?$ 1

$u_s \to U_s \;;\; i \to I \;;\; u_c \to U_c$



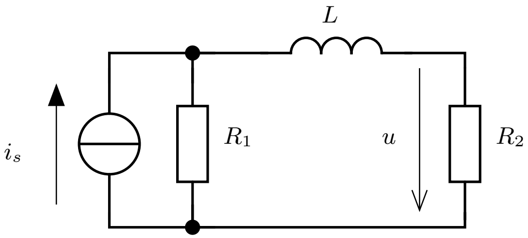
1 $sC \cdot U_c + \frac{U_c}{R_2} + \frac{U_c - U_s}{R_1} = 0$

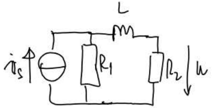
2 $I = \frac{U_c}{R_2}$

$$U_c\left(sC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{U_s}{R_1}$$

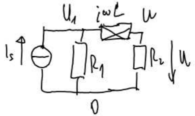
$$U_c = \frac{U_s / R_1}{sC + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}} = \frac{U_s/R_1}{\frac{sCR_1R_2 + R_1+R_2}{R_1R_2}} = \frac{R_2}{sCR_1R_2 + R_1+R_2} U_s$$

$$\frac{U_c/R_2}{U_s} = \frac{1}{sCR_1R_2 + (R_1+R_2)} = \frac{1/R_1R_2}{1 + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2 \cdot C}} = \frac{1/R_1R_2}{1 + \frac{1}{(R_1 \times R_2)\,C}}$$


L
i_s
R_1
u
R_2



$H(j\omega) = ?\ \frac{U(j\omega)}{I_s(j\omega)}$



$$\left.\begin{aligned} -I_s + \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U}{j\omega L} &= 0 \\ \frac{U}{R_2} + \frac{U - U_1}{j\omega L} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

vagy $-I_s + \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1}{R_2 + j\omega L} = 0$ és $U = \frac{R_2}{R_2 + sL} \cdot U_1$

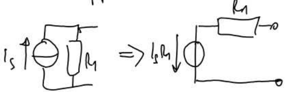
$$U_1 = \frac{I_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L}} = \frac{R_1(R_2 + sL)\cdot I_s}{R_1 + R_2 + sL}$$

$$U = \frac{R_2}{\cancel{R_2 + j\omega L}} \cdot \frac{R_1(\cancel{R_2 + j\omega L})}{(R_1 + R_2) + j\omega L} \cdot I_s = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) + j\omega L} I_s =$$

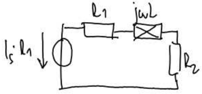
$$= \frac{R_1 R_2 / L}{j\omega + \frac{R_1 + R_2}{L}} I_s \qquad \boxed{H(j\omega) = \frac{R_1 R_2 / L}{j\omega + \frac{R_1 + R_2}{L}}}$$

dimenziók!

másképpen is lehet!



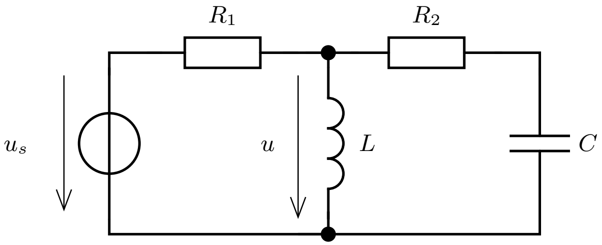
ezzel egyszerűbb lesz!



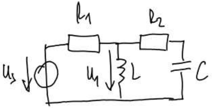
$$U = \frac{R_2}{R_1 + j\omega L + R_2} \cdot I_s R_1$$

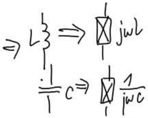
$$U = \frac{R_1 R_2}{j\omega L + (R_1 + R_2)} I_s$$

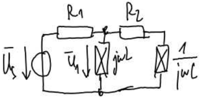
ami megegyezik a másik módszerrel!


R_1
R_2
u_s
u
L
C

3







elegendő $\bar{U}_1$!

$$\frac{\bar{U}_1}{j\omega L}+\frac{\bar{U}_1}{R_2+\frac{1}{j\omega C}}+\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_s}{R_1}=0$$

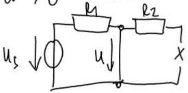
$$\bar{U}_1=\frac{U_s/R_1}{\frac{1}{j\omega L}+\frac{j\omega C}{1+j\omega R_2 C}+\frac{1}{R_1}}=\frac{\frac{1}{R_1}\cdot U_s\cdot R_1\, j\omega L\cdot(1+j\omega R_2 C)}{R_1(1+j\omega R_2 C)+j\omega C R_1\, j\omega L+j\omega L(1+j\omega R_2 C)}$$

$$\frac{\bar{U}_1}{U_s}=\frac{(j\omega)^2 R_2 LC+j\omega L}{(j\omega)^2 LC(R_1+R_2)+j\omega(L+R_1R_2C)+R_1}=$$

$$=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{(j\omega)^2+\frac{1}{R_2C}\,j\omega}{(j\omega)^2+j\omega\left(\frac{L}{R_1+R_2}+\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}\right)+\frac{R_1}{R_1+R_2}}$$

„szélső helyzetek":

$\omega\to 0$ hálózat alapján: (L → | és C → ×)

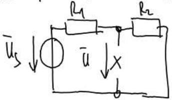


$U=0 \qquad H=0$

$H(j\omega)$ alapján

$$\lim_{\omega\to 0} A_0\cdot\frac{(j\omega)^2+j\omega\cdot\bigcirc}{(j\omega)^2+j\omega\cdot\bigcirc+\bigcirc}=\frac{0}{\bigcirc}=0$$

$\omega\to\infty$ (HF – High Frequency) L → × és C → |

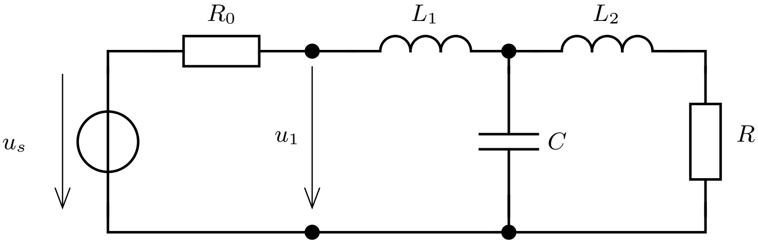


$$\bar{U}=\bar{U}_s\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$\lim_{\omega\to\infty} A_0\cdot\frac{(j\omega)^2+j\omega\cdot\bigcirc}{(j\omega)^2+j\omega\cdot\bigcirc+\bigcirc}=\lim\frac{(j\omega)^2\cdot\left(1+\frac{1}{j\omega}\bigcirc\right)}{(j\omega)^2\left(1+\frac{1}{j\omega}\dots+\frac{1}{(j\omega)^2}\dots\right)}$$

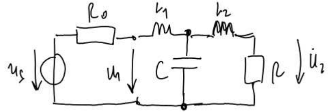
$$=A_0\cdot 1=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

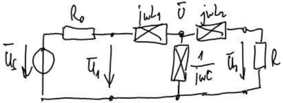
✓



▶Határozzuk az átviteli karakterisztikát!
▶Vizsgáljuk meg a szélsőséges helyzeteket ($\omega \to 0$, $\omega \to \infty$) a hálózati kép és az átviteli karakterisztika alapján is!
▶Milyen egyszerűsödés látszik, ha szimmetrikus az elrendezés? ($L_1 = L_2 = L$)

4





$$\frac{\bar U-\bar U_s}{R_0+j\omega L_1}+j\omega C\cdot\bar U+\frac{\overset{0}{\bar U}}{R+j\omega L_2}=0 \Rightarrow \bar U_2=\frac{R}{j\omega L_2+R}\bar U$$

$$\bar U_1=\bar U+\frac{j\omega L_1}{R_0+j\omega L_1}(\bar U_s-\bar U)$$

$$\bar U\left(\frac{1}{R_0+j\omega L_1}+j\omega C+\frac{1}{R+j\omega L_2}\right)=\frac{\bar U_s}{R_0+j\omega L_1}$$

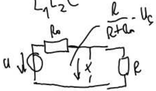
$$\frac{(R+j\omega L_2)+j\omega C(R_0+j\omega L_1)(R+j\omega L_2)+R_0+j\omega L_1}{\cancel{(R_0+j\omega L_1)}(R+j\omega L_2)}\bar U=\frac{\bar U_s}{\cancel{R_0+j\omega L_1}}$$

$$\frac{(R+j\omega L_2)+j\omega C(R_0+j\omega L_1)(R+j\omega L_2)+R_0+j\omega L_1}{\cancel{(R_0+j\omega L_1)}(R+j\omega L_2)}\bar U=\frac{\bar U_s}{\cancel{R_0+j\omega L_1}}$$

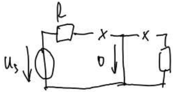
$$\frac{\bar U}{\bar U_s}=\frac{R+j\omega L_2}{(j\omega)^3(L_1L_2C)+(j\omega)^2C\cdot(L_1R+L_2R_0)+j\omega(L_1+L_2+CR_0R)+(R+R_0)}$$

$$=\underbrace{\frac{L_2}{L_1L_2C}}_{\frac{1}{L_1C}}\cdot\frac{j\omega+R/L_2}{(j\omega)^3+(j\omega)^2\left(\frac{R}{L_2}+\frac{R_0}{L_1}\right)+(j\omega)\left(\frac{L_1+L_2}{L_1L_2C}+\frac{R_0R}{L_1L_2}\right)+\frac{R+R_0}{L_1L_2C}}$$

$$\omega\to 0\quad \frac{1}{L_1C}\cdot\frac{R/L_2}{\frac{R+R_0}{L_1L_2C}}=\frac{R}{R+R_0}$$



$$\omega\to\infty\quad\to 0$$



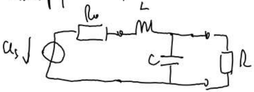
$$= \frac{L_2}{L_1 L_2 C} \cdot \frac{j\omega + R/L_2}{(j\omega)^3 + (j\omega)^2 \left(\frac{R}{L_2} + \frac{R_0}{L_1}\right) + (j\omega)\left(\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C} + \frac{R_0 R}{L_1 L_2}\right) + \frac{R + R_0}{L_1 L_2 C}}$$

$$\frac{1}{L_1 C}$$

$L_1 = L_2 = L$ szimmetrikus ezt

$$\frac{1}{LC} \cdot \frac{j\omega + R/L}{(j\omega)^3 + (j\omega)^2 \cdot \left(\frac{R+R_0}{L}\right) + j\omega\left(\frac{2}{LC} + \frac{R_0 R}{L^2}\right) + \frac{R+R_0}{L^2 C}}$$

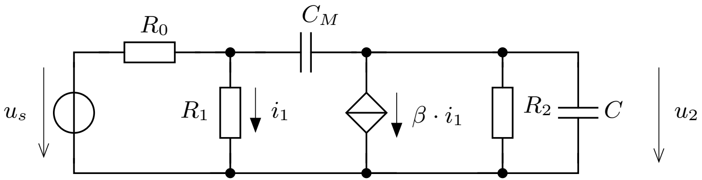
másfajta helyettesítés szokott lenni



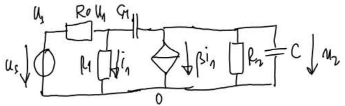
ami persze egyszerűbb

de ha elegendően sok része osztjuk a vektort akkor azonos lesz a DT ezt

FE alap kapcsolás kisjelű helyettesítő képe



- $H(j\omega) =?$
- Vizsgáljuk meg a Miller-kapacitás (C_M) hatását!



5

$$i_1=\frac{U_1}{R_1};\quad \frac{U_1-U_S}{R_0}+\frac{U_1}{R_1}+j\omega C_M\cdot(U_1-U_2)=0$$

$$j\omega C_M(U_2-U_1)+\beta\cdot\frac{U_1}{R_1}+\frac{U_2}{R_2}+j\omega C\cdot U_2=0$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R_1}+j\omega C_M & -j\omega C_M\\ -j\omega C_M+\frac{\beta}{R_1} & j\omega(C+C_M)+\frac{1}{R_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_S/R_0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{U_2}{U_S}=\frac{j\omega(C_M R_1R_2)-\beta\cdot R_2}{(j\omega)^2 C\cdot C_M\cdot R_0R_1R_2+j\omega\big(C(R_0R_2+R_1R_2)+C_M(R_0(R_1+R_2+\beta R_2)+R_1R_2)\big)+(R_0+R_1)}$$

$C_M\to 0$ esetén

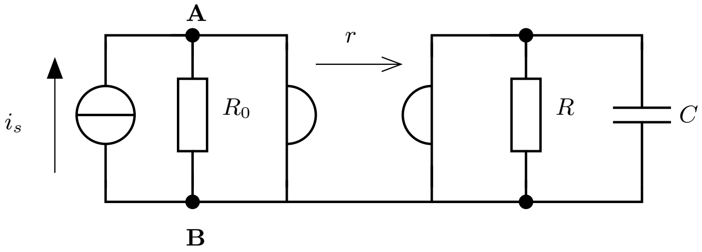
$$\frac{U_2}{U_S}=\frac{\beta R_2}{j\omega(R_0+R_1)R_2C+(R_0+R_1)}=$$

$$=\underbrace{\frac{\beta R_2}{(R_0+R_1)R_2C}}_{\frac{\beta}{C(R_0+R_1)}}\cdot\frac{1}{j\omega+\underbrace{\frac{R_0+R_1}{(R_0+R_1)R_2C}}_{1/R_2C}}$$

ami "egyszerű" elsőrendű rendszer (aluláteresztő)

$$A_0=\frac{\beta}{C(R_0+R_1)}$$

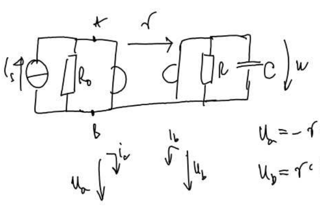
$$\Omega_0=\frac{1}{R_2C}$$



▶Határozzuk meg az AB közötti feszültséget (U_{AB}) a frekvencia függvényében!

▶Milyen kétpólussal helyettesíthető az áramgenerátorra kapcsolt AB felől látható kétpólus? (Girátor és ami utána van.) Mutassuk meg általánosan a jelleget! Mi történik, ha ideális transzformátort helyezünk a girátor helyére?

(6)



$u_a = -r\, i_b$

$u_b = r\, i_a$

$I_B + \frac{1}{R} U_B + j\omega C U_B = 0 \qquad I_B = -g \cdot U_A$

$-I_S + \frac{U_A}{R_0} + I_A = 0 \qquad I_A = g \cdot U_B$

$$\left.\begin{array}{l} -g U_A + \frac{1}{R} U_B + j\omega C U_B = 0 \\ -I_S + \frac{1}{R_0} U_A + g U_B = 0 \end{array}\right\} \quad U_A = \frac{\frac{1}{R} + j\omega C}{g} U_B$$

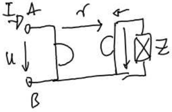
$$I_S = \left\{ g + \frac{1}{R_0 g} \underbrace{\left[\frac{1}{R} + j\omega C\right]}_{\frac{1+j\omega RC}{R}} \right\} U_B$$

$$U_B = \frac{R \cdot R_0 g}{(1+j\omega RC) + g^2 R R_0} =$$

$$U_B = \frac{R \cdot R_0 g \cdot I_S}{(1+j\omega RC) + g^2 R R_0} \Rightarrow$$

$$\frac{U_B}{I_S} = \frac{g R R_0}{j\omega RC + (1+g^2 R R_0)} = \frac{g R_0}{C} \cdot \frac{1}{j\omega + \frac{1+g^2 R R_0}{RC}}$$

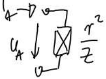
általánosítsuk a lezárás visszatranszformálását



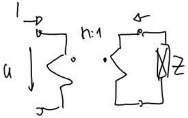
$$\left.\begin{array}{l} U_B = -I_B \cdot Z \\ U_A = -r\, I_B \\ U_B = r\, I_A \end{array}\right\}$$

$-I_B \cdot Z = r \cdot I_A$

$U_A = -r \cdot \left(-\frac{r}{Z} I_A\right) = \frac{r^2}{Z} \cdot I_A$ (nemváltó!)



tfh. $Z = R + jX \Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$ annak jellegét váltja



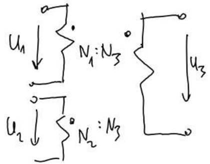
$U_A = n \cdot U_B$

$I_B = -n\, I_A$

$U_B = -I_B \cdot Z \qquad U_A = n \cdot U_B = n \cdot \left(-Z \cdot (-n I_A)\right) =$

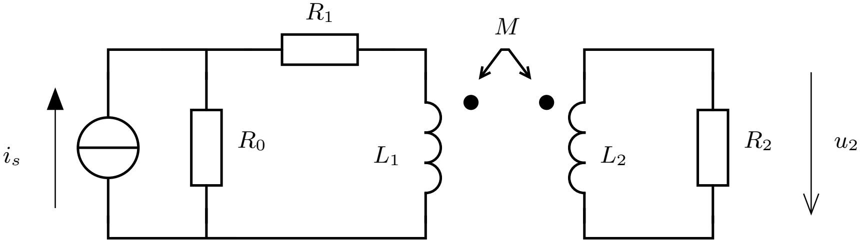
$= n^2 Z\, I_A$

$Z_{BE} = \dfrac{U_A}{I_A} = n^2 Z$ megfordítja a jellegét



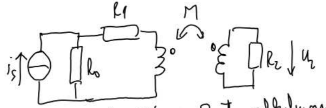
$\dfrac{U_1}{N_1} = \dfrac{U_2}{N_2} = \dfrac{U_3}{N_3}$

$N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3 = 0$



R_1
M
i_s
R_0
L_1
L_2
R_2
u_2

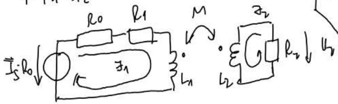
7



→ célszerű hurokáramokat alkalmazni!

+ Th-hk

$k^2 = \dfrac{M^2}{L_1 L_2}$ csatolás



$$\left.\begin{aligned}&(R_0+R_1)J_1 + j\omega L_1 \cdot J_1 + j\omega M \cdot J_2 - I_s \cdot R_0 = 0\\ &j\omega L_2 \cdot J_2 + j\omega M \cdot J_1 + J_2 \cdot R_2 = 0\end{aligned}\right\}$$

$$J_1 = \frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M} \cdot J_2$$

$$I_s \cdot R_0 = \left(j\omega M + (R_0+R_1+j\omega L_1)\cdot\frac{R_2+j\omega L_2}{j\omega M}\right) J_2$$

$$\frac{J_2}{I_s} = \frac{j\omega M \cdot R_0}{(j\omega)^2(M^2+L_1L_2) + j\omega\left(L_1R_2 + L_2(R_0+R_1)\right) + R_2(R_0+R_1)}$$

$$\frac{J_2}{I_s} = \frac{j\omega M \cdot R_0}{(j\omega)^2(M^2+L_1L_2) + j\omega\left(L_1R_2 + L_2(R_0+R_1)\right) + R_2(R_0+R_1)}$$

$$\frac{M \cdot R_0}{M^2+L_1L_2} \cdot \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + j\omega\left(\dfrac{R_2}{(M^2+L_1L_2)/L_1} + \dfrac{R_0+R_1}{(M^2+L_1L_2)/L_2}\right) + \dfrac{R_2(R_0+R_1)}{M^2+L_1L_2}}$$

- $0 \le k \le 1 \rightarrow M = k\sqrt{L_1L_2}$

$R_0 = 0{,}5$; $R_1 = 10$ $R_2 = 15$

$L_1 = 10$; $L_2 = 20$; a) $k \cong 0{,}95$ $M \cong 13{,}5$

b.) $k \cong 0{,}1$ $M = 1{,}4$

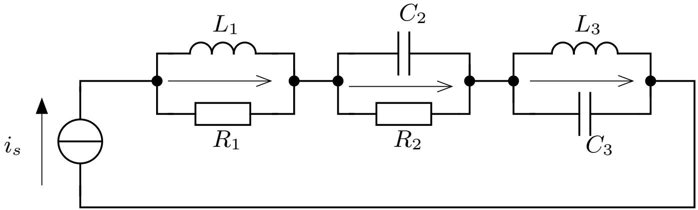
$(j\omega)^2 + 1{,}7825\, j\omega + 0{,}7799$

$-1{,}0117$

$-0{,}7709$

$(j\omega)^2 + 0{,}9418\, j\omega + 0{,}4120$

$-0{,}4709 \pm j0{,}4362$



►Az ω_0 körfrekvencián

ω_0 - n $\quad 2\omega_0 L_3 = \frac{1}{2\omega_0 C_3} = 20\ \mathrm{k\Omega} \quad$ 4 mA, kΩ, $\quad \boxed{8.}$

$\omega_0 L_1 = 10 \quad \frac{1}{\omega_0 C_2} = 30 \quad R_2 = 10\ \mathrm{k\Omega}$

$R_1 = 10$

$$u_s(t) = [10 + 5\cdot\cos(\omega_0 t) + 8\cdot\cos(\omega_0 t + 45^\circ)]\,\mathrm{V}$$

$$Z_1 = j\omega L_1 \times R_1 = \frac{R_1 j\omega L_1}{j\omega L_1 + R_1} = R_1 \cdot \frac{j\omega}{j\omega + R_1/L_1}$$

$$Z_2 = R_2 \times \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{R_2/j\omega C_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} =$$

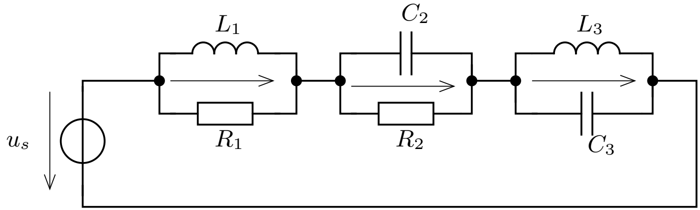
$$= \frac{1}{C_2}\cdot\frac{1}{j\omega + \frac{1}{R_2 C_2}}$$

$$Z_3 = j\omega L_3 \times \frac{1}{j\omega C_3} = \frac{j\omega L_3/j\omega C_3}{j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} = \frac{j\omega L_3}{(j\omega)^2 L_3 C_3 + 1}$$

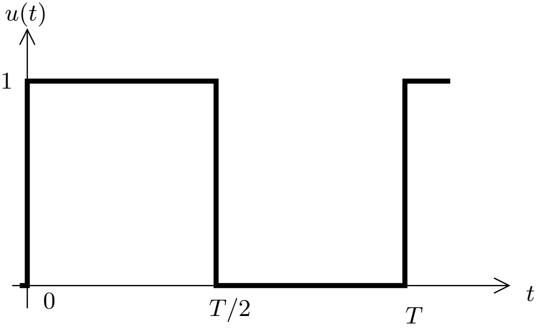
$$= \frac{1}{C_3}\,\frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{1}{L_3 C_3}}$$

$L_3 = \frac{20}{2\omega_0} \quad C_3 = \frac{1}{2\omega_0 \cdot 20}$

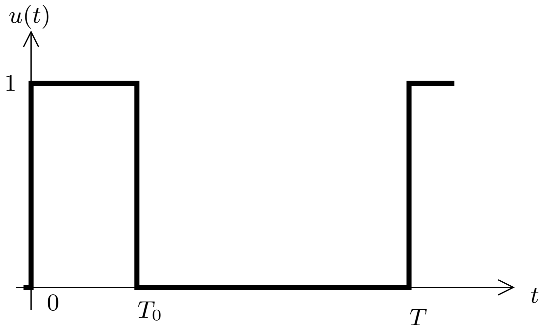
$L_3 C_3 = \frac{1}{4\omega_0^2} \rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{1}{L_3 C_3}} = 2\omega_0$



► Az ω_0 körfrekvencián

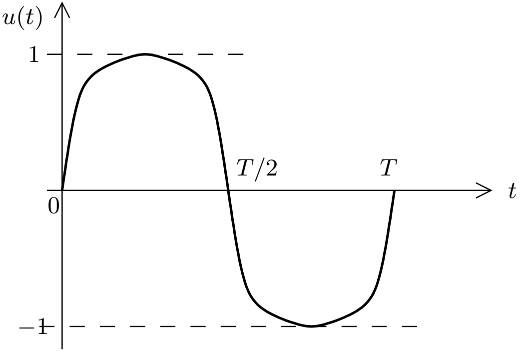


- Határozzuk meg a jel effektív értékét, egyszerű középértékét!
- Határozzuk meg a Fourier-sorfejtés módusainak komplex illetve valós együtthatóit! Ábrázoljuk a komplex együtthatókat a számsíkon!
- Adjuk meg a szükséges sorfejtési rendet, hogy a sorfejtés 90, 95 illetve 99 százalékosan egyezzen az eredeti jellel!



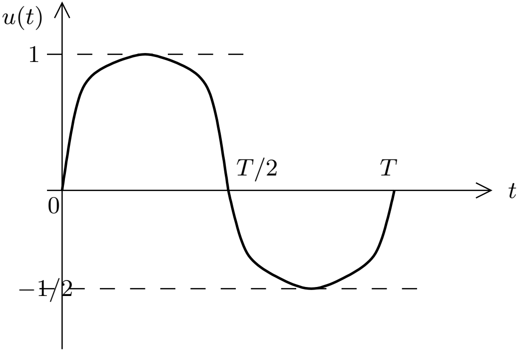
- Határozzuk meg a jel effektív értékét, egyszerű középértékét!
- Határozzuk meg a Fourier-sorfejtés módusainak komplex illetve valós együtthatóit! Ábrázoljuk a komplex együtthatókat a számsíkon!
- Adjuk meg a szükséges sorfejtési rendet, hogy a sorfejtés 90, 95 illetve 99 százalékosan egyezzen az eredeti jellel!

$$u(t) = 1 \cdot \sin(\Omega t), \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$



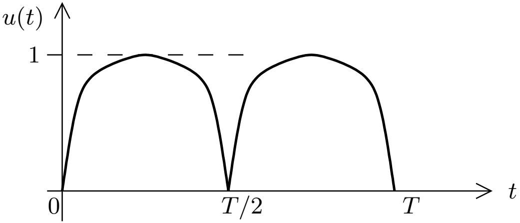
- Határozzuk meg a jel effektív értékét, egyszerű középértékét!
- Határozzuk meg a Fourier-sorfejtés módusainak komplex illetve valós együtthatóit! Ábrázoljuk a komplex együtthatókat a számsíkon!

$$u(t) = (\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T/2))\sin(\Omega t) + (\varepsilon(t - T/2) - \varepsilon(t - T))\,\frac{1}{2}\sin(\Omega t)\,, \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$



- Határozzuk meg a jel effektív értékét, egyszerű középértékét!
- Határozzuk meg a Fourier-sorfejtés módusainak komplex illetve valós együtthatóit! Ábrázoljuk a komplex együtthatókat a számsíkon!

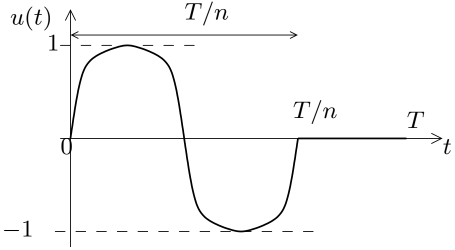
$$u(t) = \left|\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right|$$



- Határozzuk meg a jel effektív értékét, egyszerű középértékét!
- Határozzuk meg a Fourier-sorfejtés módusainak komplex illetve valós együtthatóit! Ábrázoljuk a komplex együtthatókat a számsíkon!
- Hasonlítsuk össze az eredményeket a WFN22SIG3 esetében kapott együtthatókkal!

Vizsgáljuk meg az alábbi jelet, amelyet egy T/n periódushosszú szinuszos jel egyetlen periódusa ad, majd a $T - T/n$ időben zérus a jel!

$$u(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{T/n}t\right), & 0 < t < T/n \\ 0, & T/n < t < T \end{cases}$$



- Határozzuk meg a jel effektív értékét, egyszerű középértékét!
- Határozzuk meg a Fourier-sorfejtés módusainak komplex! Ábrázoljuk a komplex együtthatókat a számsíkon!
- Hasonlítsuk össze az eredményeket a WFN22SIG3 esetében kapott együtthatókkal!