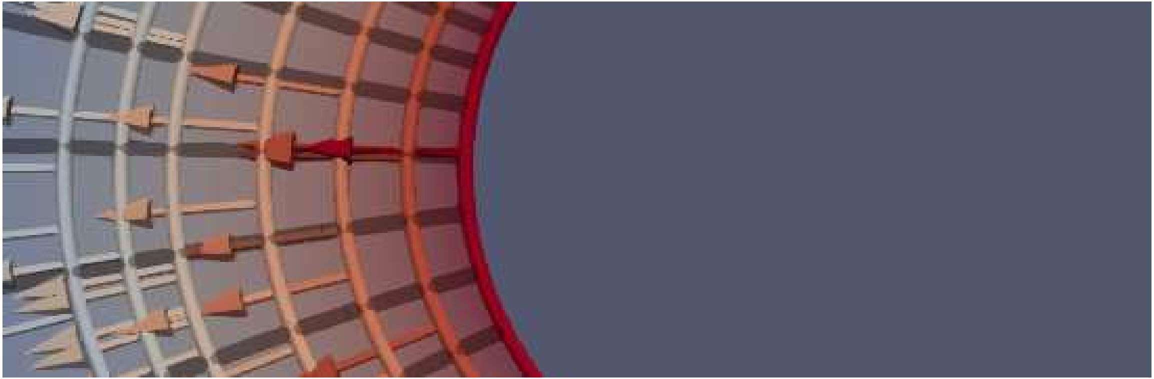
Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék
Antennák és EMC kutatócsoport
NES Laboratórium

Jelek és rendszerek 2. - 2022/23 I. félév

Fourier-sorfejtés és alkalmazása



reichardt.andras@vik.bme.hu

Reichardt András | (2022. szeptember 11.)

- Fourier-együtthatók kiszámítása, átváltás különböző alakok között
- Szorzat sorfejtési együtthatói
- Különböző kitöltésű négyszögjel
- Tetszőleges jel előállítása impulzus együtthatókkal
- Vezeték modellek és vizsgálatuk

$$f(t) = f(t+T),\ \text{ahol } T < \infty$$

$$f(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} F_p^c e^{jp\omega_0 t} \approx \sum_{p=-N}^{N} F_p^c e^{jp\omega_0 t}$$

ahol a Fourier-sorfejtési együtthatók

$$F_p^C = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\cdot e^{-jp\omega_0 t} dt$$

Valós jel esetében az együtthatókra fennáll, hogy $F_{-p}^C = (F_p^c)^\star$, amiből következően

$$|F_p^c| = |F_{-p}^c|, \qquad \text{arc } F_{-p}^C = -\,\text{arc } F_p^C; \quad \text{Re } F_{-p}^C = \text{Re } F_p^C; \quad \text{Im } F_{-p}^C = -\text{Im } F_p^c$$

- Komplex alak - legkönnyebb számolni

$$u(t) = \sum_{p=-N}^{N} U_p^C\ e^{jp\omega_0 t}; \qquad U_p^C = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)e^{-jp\omega_0 t}dt; \qquad p = -N, \dots N$$

- Matematikai alak - szimmetriák használata, valós együtthatók

$$u(t) = U_0 + \sum_{p=1}^{N} \left(U_p^A \cos\left(p\omega_0 t\right) + U_p^B \sin\left(p\omega_0 t\right)\right)$$

$$U_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)dt; \quad U_p^A = \frac{2}{T}\int_{(T)} u(t)\cos(p\omega_0 t)dt; \quad U_p^B = \frac{2}{T}\int_{(T)} u(t)\sin(p\omega_0 t)$$

- Mérnöki valós alak - számítás hálózatokkal

$$u(t) = U_0 + \sum_{q=1}^{N} \hat{U}_p \cos\left(q\omega_0 t + \varrho_p\right); \qquad \hat{U}_p = 2\cdot|U_p^c|; \quad \varrho_p = \text{arc } U_p^c$$

Tekintsük a T periódusú szinuszos időfüggvényt! Határozzuk meg a komplex sorfejtési együtthatókat!

$$U_p^c = \frac{1}{T}\int_{(T)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) e^{-jp\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{(T)} \frac{1}{2j}\left\{e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}\right\} e^{-jp\omega_0 t}dt = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\Omega t}e^{-jp\omega_0 t}dt = \left[\frac{e^{j(\Omega - p\omega_0)t}}{j(\Omega - p\omega_0)}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{j(\Omega - p\omega_0)}\left(e^{j(\Omega - p\omega_0)(T/2)} - e^{j(\Omega - p\omega_0)(-T/2)}\right) =$$

$$= \frac{2j\sin((\Omega - p\omega_0)T/2)}{j(\Omega - p\omega_0)} = \begin{cases} 2, & \text{ha } \Omega - p\omega_0 \to 0 \\ 0, & \text{ha } \Omega - p\omega_0 = n \cdot \omega_0 \\ \text{valami}, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$I_2 = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\Omega t}e^{-jp\omega_0 t}dt = \ldots = \frac{2j\sin\left((\Omega + p\omega_0)T/2\right)}{-j(\Omega + p\omega_0)} = \begin{cases} -2, & \text{ha } \Omega + p\omega_0 = 0 \\ 0, & \text{ha } \Omega + p\omega_0 = n \cdot \omega_0 \\ \text{más}, & \text{egyébként} \end{cases}$$

- előfordul pl. ablakozó függvény alkalmazásánál
- Keressük a $g(t) = f(t) \cdot w(t)$ alakú periodikus jel együtthatóit!

$$G_p^c = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t) \cdot w(t)e^{-jp\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{(T)} \left(\sum_{q=-N}^{N} F_q^c e^{jq\omega_0 t}\right) \cdot w(t)e^{-jp\omega_0 t}dt =$$

$$= \sum_{q=-N}^{N} F_q^c \left\{\frac{1}{T}\int_{(T)} e^{jq\omega_0 t} \cdot w(t)e^{-jp\omega_0 t}dt\right\} = \sum_{q=-N}^{N} F_q^c \left\{\frac{1}{T}\int_{(T)} w(t) \cdot e^{-j(p-q)\omega_0 t}dt\right\}$$

ahol a kapcsos zárójelen belüli rész a W_{p-q}^c együttható előállítása

$$G_p^c = \sum_{q=-N}^{N} F_q^c W_{p-q}^c$$

diszkrét konvolúcióval kapható meg.

- ha a levezetésben $w(t)$-t helyettesítjük a Fourier-soros előállításával, akkor

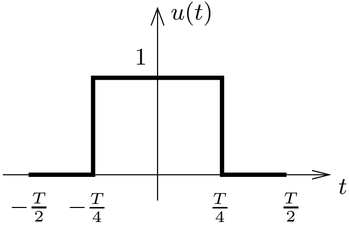
$$G_p^c = \sum_{q=-N}^{N} F_{p-q}^C W_q^c$$

alakot kapjuk.

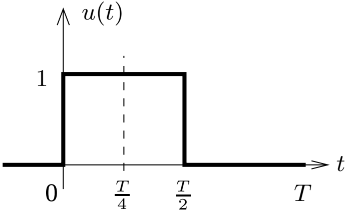
- Legyen az ablakozó függvény a Hamming-ablak, az ablakozott a tiszta szinuszos jel

$$f(t) = \sin(\omega_0 t); \qquad w(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T/2)$$

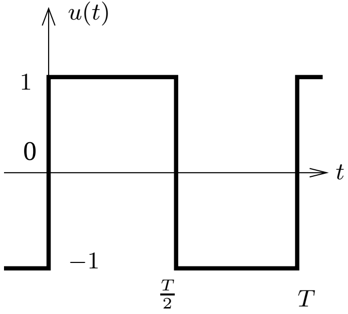
Tekintsük a periodikus jelet, amelynek egy periódusa az alábbi ábrán (szimmetrikus négyszögjel) !
Vizsgáljuk meg az ennek módosításával kapott másik két jelet is!



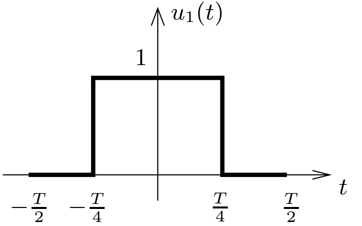
a. Szimmetrikus négyszögjel



b. T/4-vel eltolt négyszögjel



c. Eltolt és nagyított négyszögjel



Egy periódusban

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Együtthatók kiszámítása :

$$U_p^C = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)\cdot e^{-jp\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} 1\cdot e^{-jp\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\cdot\left[\frac{e^{-jp\omega_0 t}}{-jp\omega_0}\right]_{-T/4}^{T/4} =$$

$$= \frac{1}{jp\omega_0 T}\left(e^{jp\omega_0(T/4)} - e^{-jp\omega_0(T/4)}\right) = \frac{1}{jp\omega_0 T}2j\sin\left(p\omega_0\frac{T}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sin(p\pi/2)}{p\pi/2}$$

Tisztán valós értékű (ami az időbeli párosság alapján is adódik), amplitúdója :

$$\frac{1}{2}\frac{|\sin(p\pi/2)|}{|p\pi/2|}$$

Nullahelyek vannak

$$\sin(p\pi/2) = 0$$

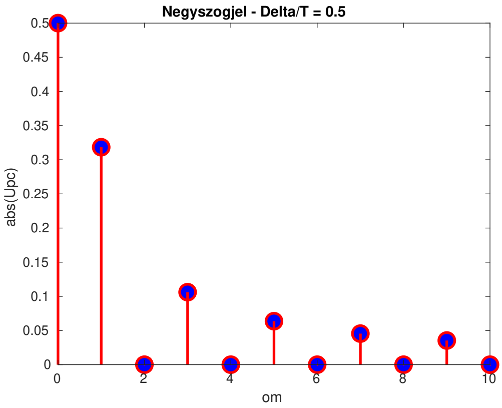
azaz

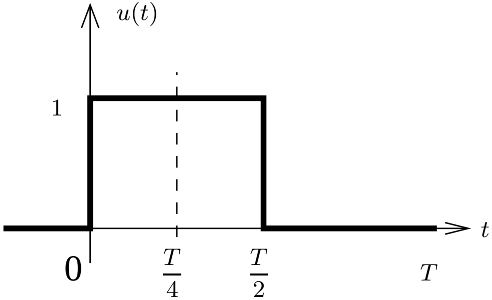
$$p\pi/2 = n\pi \qquad p_n = 2 \cdot n$$

A folytonos burkoló görbéje a

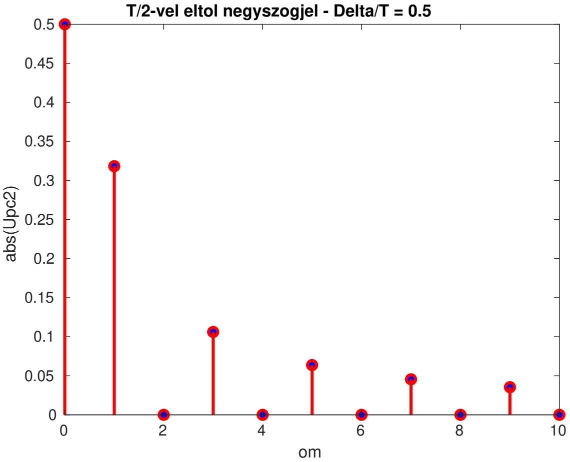
$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{sin(x)}{x}$$

ahol x a módusindexnek megfelelő változó.



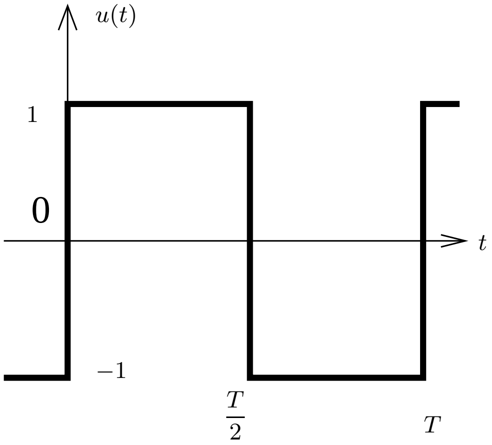


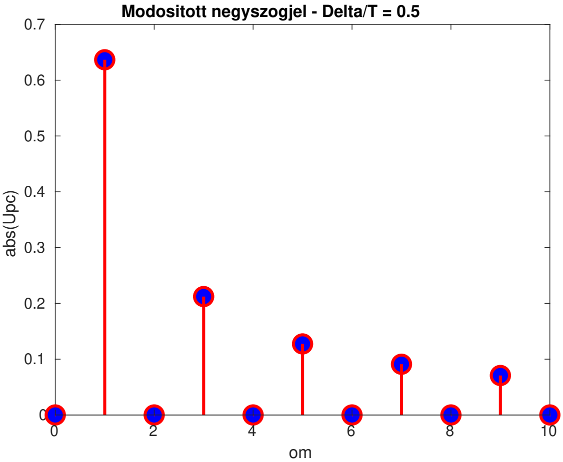
Szimmetrikus négyszögjel $T/4$-vel eltolásával adódó négyszögjel



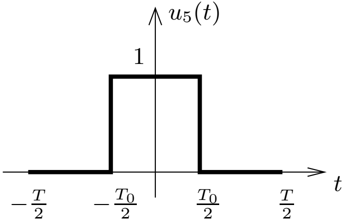
Az amplitúdó spektrum elemei.
Megegyezik az eredeti jel amplitúdóspektrumával!
Miért?

Az eredeti négyszögjel $(u_1(t))$ felhasználásával kapott jel : $u_3(t) = 2 \cdot u_1(t - T/4) - 1$





Megjegyzés : Megkapható lett volna $u_1(t - T/4) - u_1(t - 3T/4)$ módon is.



Egy periódusban

$$u_4(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Együtthatók kiszámítása ($\beta = T_0/T < 0$ kitöltési arány)

$$U_p^C = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)\cdot e^{-jp\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1\cdot e^{-jp\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\cdot\left[\frac{e^{-jp\omega_0 t}}{-jp\omega_0}\right]_{-T_0/2}^{T_0/2} =$$

felhasználjuk, hogy $p\omega_0\frac{T_0}{2} = p\pi\cdot\frac{T_0}{T} = p\cdot\beta\pi$

$$= \frac{1}{jp\omega_0 T}\left(e^{jp\omega_0(T_0/2)} - e^{-jp\omega_0(T_0/2)}\right) = \frac{1}{jp\omega_0 T}2j\sin\left(p\omega_0\frac{T_0}{2}\right)$$

mivel $p\omega_0 T = p\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T = p\cdot 2\pi$ ezáltal

$$\boxed{U_p^C = \beta\cdot\frac{\sin(p\cdot\beta\pi)}{p\cdot\beta\pi}}$$

- egyenösszetevő értéke :

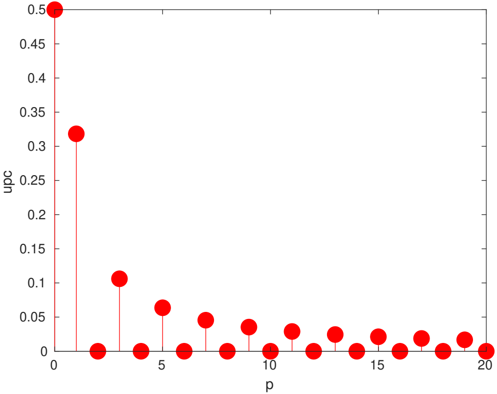
$$\boxed{U_0^C} = \lim_{p\to 0} \beta \cdot \frac{\sin(p\cdot\beta\pi)}{p\cdot\beta\pi} = \beta\cdot\lim_{p\to 0}\frac{\sin(p\cdot\beta\pi)}{p\cdot\beta\pi} = \boxed{\beta}$$

$$\text{másként számítva : } U_0 = \frac{1}{T}\int_T u(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1\ dt = \frac{T_0}{T} = \beta \qquad \blacksquare\text{QED}$$

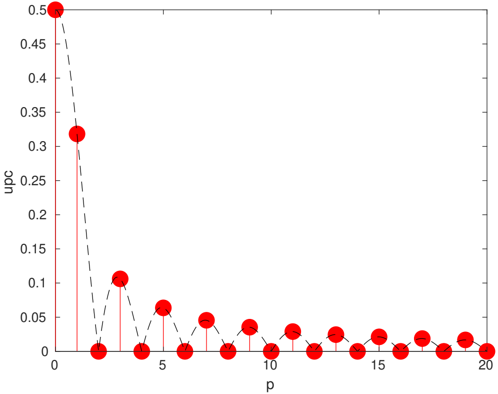
- amplitúdóspektrum zéruspontjai :

$$\sin(p\cdot\beta\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_k\cdot\beta\pi = k\cdot\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_k = k\cdot\beta^{-1} = k\cdot\tfrac{T}{T_0}}$$

- keskenyedő jel (csökkenő kitöltési tényező, azaz kisebb β) esetében a burkoló által adott görbe ellaposodik, miközben a maximális értéke csökken

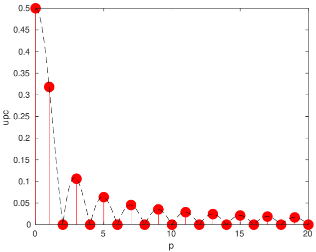


$\beta = \frac{T_0}{T} = \frac{1}{2}$ esetén Fourier-együtthatók

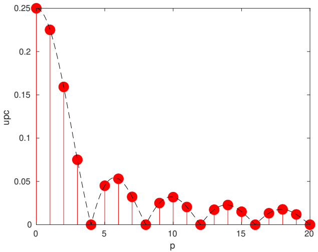


F-együtthatók és spektrum folytonosként ábrázolva

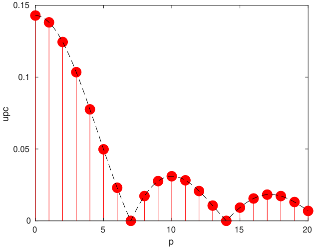
$\beta = \frac{1}{2}$



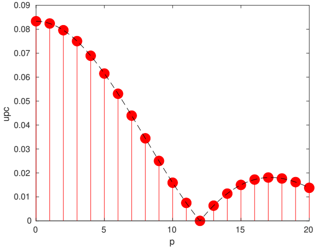
$\beta = \frac{1}{4}$



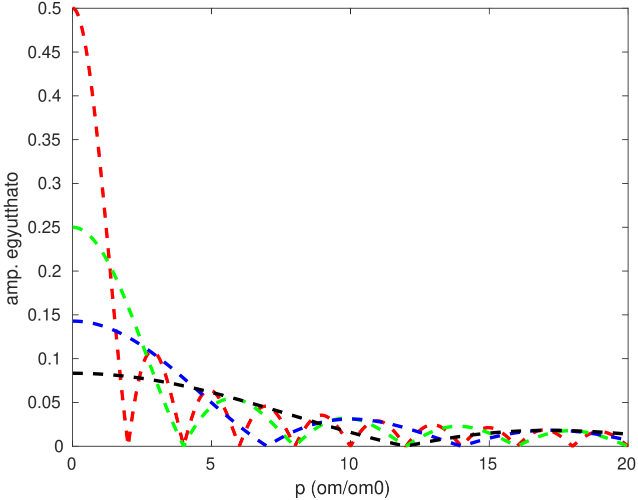
$\beta = \frac{1}{7}$



$\beta = \frac{1}{12}$

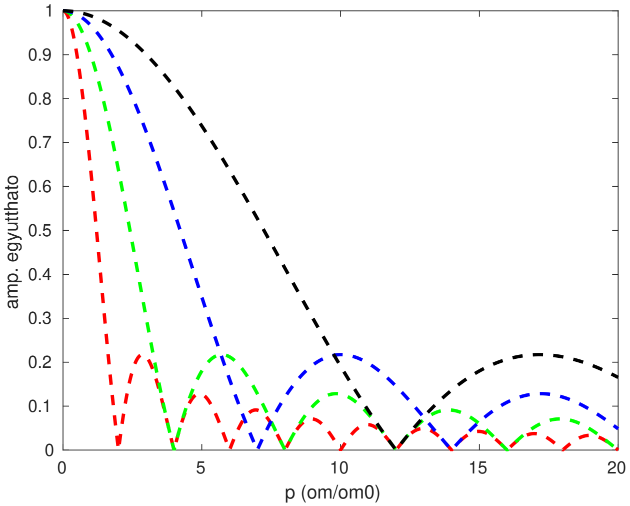


A korábbi spektrumok együtt ábrázolva :



- piros : $\beta = 1/2$
- zöld : $\beta = 1/4$
- kék : $\beta = 1/7$
- fekete : $\beta = 1/12$

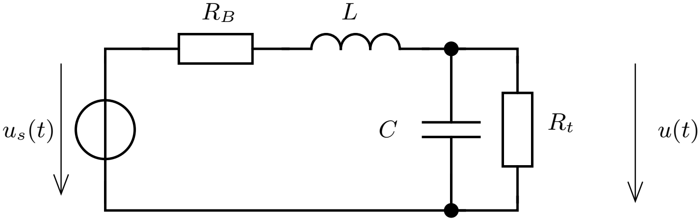
A korábbi spektrumok együtt ábrázolva, a maximális amplitúdóval normálva.

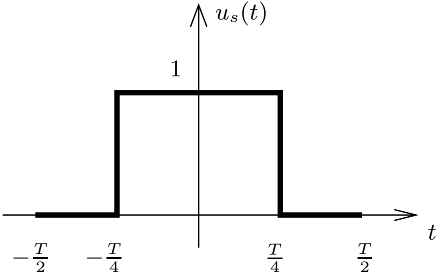


- piros : $\beta = 1/2$
- zöld : $\beta = 1/4$
- kék : $\beta = 1/7$
- fekete : $\beta = 1/12$

Mit jelent a szélesség fogalma ebben az esetben?

Tekintsük az alábbi hálózatot! Határozzuk meg az átviteli karakterisztikát és ennek segítségével adjuk meg a választ!





- feszültségosztás alkalmazásával adódik az átviteli karakterisztika

$$\frac{U(j\omega)}{U_s(j\omega)} = \frac{R \times Z_C}{R \times Z_C + \frac{R}{4} + ZL} = \frac{\dfrac{R}{1 + j\omega RC}}{\dfrac{1}{1 + j\omega RC} + \dfrac{R}{4} + j\omega L} = \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{(j\omega)^2 + j\omega\left(\dfrac{R}{4L} + \dfrac{1}{RC}\right) + \dfrac{5}{4LC}}$$

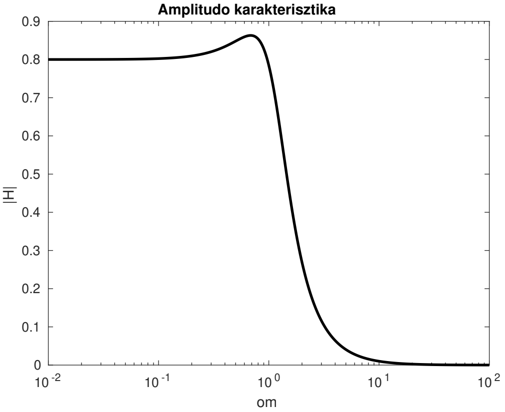
- $L = 1,\ C = 1,\ R = 1$ esetén

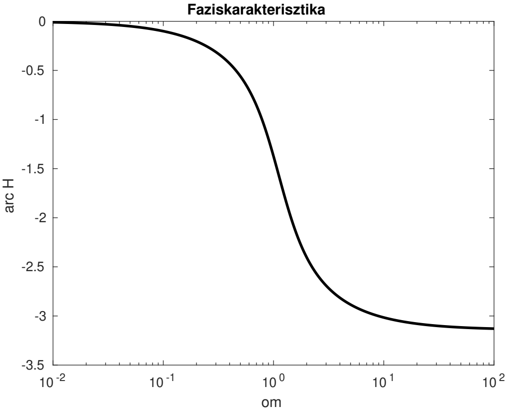
$$H(jw) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 1{,}25 \cdot j\omega + 1{,}25}$$

- gerjesztés spektruma :

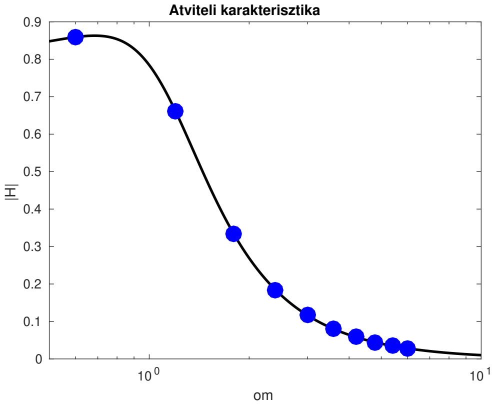
$$U_p^C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(p \cdot \pi \frac{1}{2}\right)}{p \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}}$$

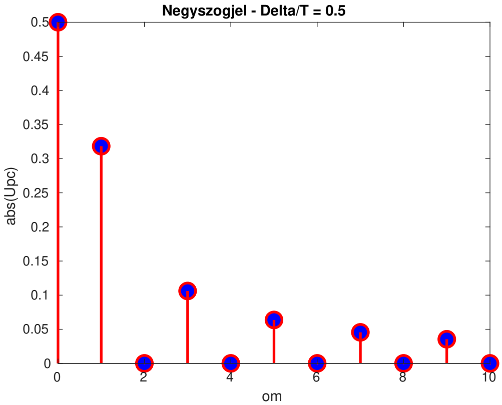
amelyet mérnöki valós alakban fogjuk használni, hogy a válasz együtthatóit is ki tudjuk számítani ($\hat{U}_p = 2 \cdot |U_p^C|$ és $\varrho_p = \text{arc } U_p^C$, $p = 1, \ldots N$)

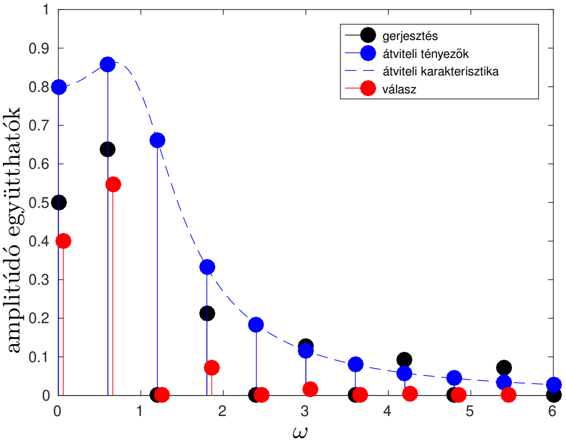

Amplitudo karakterisztika
|H|
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
om


Faziskarakterisztika
arc H
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
om

- átviteli karakterisztika amplitúdója a gerjesztés által kijelölt frekvenciákon az átvitellel (kék teli körök) és a gerjesztés (szimmetrikus négyszögjel) amplitúdóspektruma







- gerjesztés mérnöki valós alak amplitúdói [fekete teli kör]
- átviteli karakterisztika [kék szagatott vonal]
- átviteli tényezők [kék teli körök]
- válasz mérnöki valós alak amplitúdói [piros teli kör]
- A hálózat átvitelének töréspontja gerjesztés alapfrekvenciájának néhányszorosa. A hálózat a jel lényeges összetevőit átviszi.