Jelek és rendszerek 2. - 2019. ősz

8. gyakorlat

Inverz Laplace-transzformáció alkalmazása

Reichardt, András

2019. október 15.

Feladat

Határozzuk meg az $f_1(t)$ időfüggvényt az $F_1(s)$ Laplace-transzformált alapján!

$$F_1(s) = \frac{3 \cdot s^2 - 2 \cdot s + 5}{s^3 + s^2 + 0{,}58 \cdot s + 0{,}136}$$

Megoldás

Nem kell polinomosztást végrehajtani, mert már valódi racionális törtfüggvény $F_1(s)$.
A pólusok $p_1 = -0{,}4; p_{2,3} = -0{,}3 \pm 0{,}5j$

$$F_1(s) = \frac{A}{s + 0{,}4} + \frac{B}{s + 0{,}3 - j0{,}5} + \frac{C}{s + 0{,}3 + j0{,}5}$$

$$A = \left. \frac{3 \cdot s^2 - 2 \cdot s + 5}{s^2 - 0{,}6s + 0{,}34} \right|_{s=-0{,}4};$$

$$B = \left. \frac{3 \cdot s^2 - 2 \cdot s + 5}{(s + 0{,}4)(s + 0{,}3 + j0{,}5)} \right|_{s=-0{,}3+j0{,}5}; C = \left. \frac{3 \cdot s^2 - 2 \cdot s + 5}{(s + 0{,}4)(s + 0{,}3 - j0{,}5)} \right|_{s=-0{,}3-j0{,}5};$$

Brute-force

$$\frac{3\cdot s^2-2\cdot s+5}{(s+0{,}4)(s+0{,}3-j0{,}5)(s+0{,}3+j0{,}5)}=\frac{A}{s+0{,}4}+\frac{B}{s+0{,}3-j0{,}5}+\frac{C}{s+0{,}3+j0{,}5}$$

$$=\frac{A\cdot(s+0{,}3-j0{,}5)(s+0{,}3+j0{,}5)+B\cdot(s+0{,}4)(s+0{,}3+j0{,}5)+C(s+0{,}4)(s+0{,}3-j0{,}5)}{(s+0{,}4)(s+0{,}3-j0{,}5)(s+0{,}3+j0{,}5)}$$

$$=\frac{s^2(A+B+C)+s(0{,}6A+(0{,}7+0{,}5j)B+(0{,}7-0{,}5j)C)+(0{,}34A+(0{,}12+0{,}2j)B+(0{,}12-0{,}2j)C)}{(s+0{,}4)(s+0{,}3-j0{,}5)(s+0{,}3+j0{,}5)}$$

$$\left.\begin{aligned}s^2:&\qquad 3=&&A+B+C\\ s:&\qquad -2=&&0{,}6A+(0{,}7+0{,}5j)B+(0{,}7-0{,}5j)C\\ 1:&\qquad 5=&&(0{,}34A+(0{,}12+0{,}2j)B+(0{,}12-0{,}2j)C)\end{aligned}\right\}$$

$$A=24{,}1538;\qquad B=-10{,}5769+1{,}6846j=10{,}71\ e^{2{,}9836j};\qquad B=-10{,}5769-1{,}6846j$$

Matlab

számláló : `num = [3 -2 5];`
nevező : `den = [1 1 0.58 0.136];`

```
>> [r,p,k] = residue(num,den)
r =
 -10.5769 + 1.6846i
 -10.5769 - 1.6846i
  24.1538 + 0.0000i
p =
  -0.3000 + 0.5000i
  -0.3000 - 0.5000i
  -0.4000 + 0.0000i
k =
     []
```

Matlab alapján

$$\frac{3 \cdot s^2 - 2 \cdot s + 5}{(s+0{,}4)(s+0{,}3-j0{,}5)(s+0{,}3+j0{,}5)}$$

Kiolvashatóan az együtthatók :

$$F_1(s) = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_2} + \frac{r_3}{s-p_3}$$

$$p_1 = -0{,}3 + 0{,}5j \to r_1 = -10{,}5769 + 1{,}6846j$$

$$p_2 = -0{,}3 - 0{,}5j \to r_2 = -10{,}5769 - 1{,}6846j$$

$$p_3 = -0{,}4 \to r_3 = 24{,}1538$$

$$f_1(t) = \varepsilon(t)\left\{24{,}1538 \cdot e^{-0{,}4t} + 2 \cdot 10{,}7102 \cdot \cos\left(0{,}5t + 2{,}98\right)\right\}$$

Határozzuk meg $f_2(t)$-t, ha

$$F_2(s) = 3 \cdot \frac{2 \cdot s^2 + 3}{s^2 + 3 \cdot s + 2}$$

számláló és nevező

```
» num = 3*[2 0 3];
» den = [1 3 2];
```

pólusok meghatározása :

```
» roots(den)
```

$$p_1 = -2; p_2 = -1$$

zérusok :

```
» roots(num)
```

$$z_{12} = \pm 1{,}2247j$$

polinomosztás kell, hogy valódi racionális tört-függvény legyen

$$F_2(s) = 6 + \frac{-18s - 3}{(s+2)(s+1)} = 6 + F_{2b}(s)$$

$$F_{2b}(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = \left.\frac{-18s - 3}{s+1}\right|_{s=-2} = -33$$

$$B = \left.\frac{-18s - 3}{s+2}\right|_{s=-1} = 15$$

Visszatranszformálva :

$$f_2(t) = 6\delta(t) + \varepsilon(t)\left(-33e^{-2t} + 15e^{-t}\right)$$

Megoldás Matlab-bal

```
>> num = 3*[2 0 3]; den = [1 3 2];
>> roots(den)
ans =
    -2
    -1
>> roots(num)
ans =
   0.0000 + 1.2247i
   0.0000 - 1.2247i
>> [r,p,k] = residue(num,den)
r =
   -33
    15
p =
    -2
    -1
k =
     6
```

Mi $f_3(t)$, ha

$$F_3(s) = \frac{2s^2 + 3s + 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

```
>> num = [2 3 4];
>> den = [1 5 8 4];
>> [r,p,k] = residue(num, den)
r =
   -1.0000
   -6.0000
    3.0000
p =
   -2.0000
   -2.0000
   -1.0000
k =
     []
```

$$p_{1,2} = -2; \qquad p_3 = -1$$

$$F_3(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+1}$$

$$B = \left.\frac{2s^2 + 3s + 4}{s+1}\right|_{s=-2} = -6$$

$$C = \left.\frac{2s^2 + 3s + 4}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 3$$

$$s^2: \qquad A + C = 2 \rightarrow A = 2 - C = -1$$

$$f_3(t) = \varepsilon(t) \cdot \left(-1e^{-2t} - 6te^{-2t} + 3e^{-t}\right)$$