Példák és feladatok

a

Hálózatok és rendszerek analízise 2.

tárgyhoz

Reichardt András

2003. okt. 13 – nov. 8.

1. fejezet

Komplex frekvenciatartománybeli analízis

Az alábbiakban a komplex frekvenciatartományban történő hálózat analízishoz vannak példák és gyakorló feladatok.

1.1. Laplace-transzformáció

A Laplace-transzformáció definíciója :

$$F(s) = \int_{-0}^{\infty} f(t)\ e^{-st} dt \qquad (1.1.1)$$

1.1.1. Példa feladatok

1. **Határozzuk meg az alábbi jel Laplace-transzformáltját!**

   $$\boldsymbol{\mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)\right\} =?}$$

   A definíciós integrál közvetlen alkalmazásával kapjuk

   $$F(s) = \mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)\right\} = \int_{-0}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\infty} = \frac{0-(1)}{-s} = \frac{1}{s} \qquad (1.1.2)$$

2. **Határozzuk meg az alábbi jel Laplace-transzformáltját!**

   $$\boldsymbol{\mathscr{L}\left\{e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\right\} =?}$$

   Alkalmazzuk az (1.1.1) definíciós integrált :

   $$\int_{-0}^{\infty} e^{-\alpha t - st} dt = \left[\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)}\right]_{-0}^{\infty} = \frac{1-0}{s+\alpha} = \frac{1}{s+\alpha}$$

3. **Határozzuk meg az alábbi jel Laplace-transzformáltját!**

$$\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{f(t)e^{-\alpha t}}\right\} = ?$$

Az előző feladat gondolatmenete alapján haladva a definíciós integrál kifejezésére kapjuk

$$\int_{-0}^{\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_{-0}^{\infty} f(t)e^{-\xi t}dt = F(\xi) = F(s+\alpha)$$

4. **Határozzuk meg az alábbi jel Laplace-transzformáltját!**

$$\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{f(t-T)\varepsilon(t-T)}\right\} = ?$$

Az argumentumban lévő $t-T$ alapján az integrációs változóban $t \to \xi = (t-T)$ transzformációt hajtjuk végre, akkor a

$$\int_{-0}^{\infty} \varepsilon(t-T)f(t-T)e^{-st}dt = \int_{T-0}^{\infty} f(t-T)e^{-s(t-T+T)}dt = e^{-sT} \cdot \int_{-0}^{\infty} f(\xi)e^{-s\xi}d\xi = e^{-sT}F(s)$$

ahol $F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$ jelenti az $f(t)$ jel Laplace-transzformáltját.

5. **Határozzuk meg az alábbi jel Laplace-transzformáltját!**

$$\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{e^{-\alpha(t-T)}\varepsilon(t-T)}\right\} = ?$$

Felhasználva az előző példa eredményét (időben eltolt jel Laplace-transzformáltjának kifejezése

$$\mathscr{L}\left\{e^{-\alpha(t-T)}\varepsilon(t-T)\right\} = e^{-sT} \cdot \mathscr{L}\left\{e^{-\alpha}\right\} = \frac{e^{-sT}}{s+\alpha}$$

6. **Határozzuk meg az alábbi jel Laplace-transzformáltját!**

$$\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{e^{-\alpha t}\varepsilon(t-T)}\right\} = ?$$

Az időben eltolt jel Laplace-transzformáltjára vonatkozó tétel alkalmazásához a megfelelő alakra kell hozni a transzfolmálandó jelet. Ezért $e^{-\alpha t} = e^{-\alpha(t-T+T)}$ műveletet végezzük el. Így kapjuk a transzformált értékére

$$\mathscr{L}\left\{e^{-\alpha t}\varepsilon(t-T)\right\} = \mathscr{L}\left\{e^{\alpha(t-T+T)}\right\} = e^{-\alpha T}\mathscr{L}\left\{e^{-\alpha(t-T)}\right\} = e^{-\alpha T} \cdot \frac{e^{-sT}}{s+\alpha}$$

7. **Határozzuk meg az alábbi jel Laplace-transzformáltját!**

$$\mathscr{L}\left\{\boldsymbol{f(t)}\right\} = ?$$

ha a jel

$$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/T & 0 < t \leq T \\ 1 & T < t \end{cases}$$

Az (1.1.1) definíciós integrált szakaszonkénti számítással kapjuk meg.

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^T te^{-st}dt + \int_T^\infty e^{-st}dt$$

A második integrál számítása egyszerűbb :

$$\int_T^\infty e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_T^\infty = \frac{e^{-sT} - 0}{s}$$

Az első integrált parciális integrálással számítjuk ki, alkalmazva (12) összefüggést. Ha $f = t$ és $g' = e^{-st}$ akkor $f' = 1$ és $g = e^{-st}/(-s)$

$$\int_0^T te^{-st}dt = \left[\frac{te^{-st}}{-s}\right]_0^T - \int_0^T \frac{e^{-st}}{-s}\,dt = -\frac{Te^{-sT}}{s} - \left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^T = -\frac{e^{-sT} - 1 + sTe^{-sT}}{s^2}$$

A részintegrálokat összeadva kapjuk a teljes integrál értékét :

$$F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{se^{-sT} + 1 - e^{-sT} - sTe^{-sT}}{s^2} = \frac{1 - e^{-sT}(1 - s + sT)}{s^2}$$

Megjegyzés : Mi történik, ha T értékét minden határon túl növeljük?
Ebben az esetben $\lim_{T\to\infty}(1 - s + sT)e^{-sT} = 0$ és

$$lim_{T\to\infty}F(s) = \frac{1}{s^2}$$

ami az előzetes várakozásnak megfelel, mert $\lim_{T\to\infty} f(t) = t\varepsilon(t)$.

8. **Határozzuk meg az jel Laplace-transzformáltját, ha**

$$f(t) = \begin{cases} t/T & 0 < t < T \\ 2 - t/T & T < t < 2T \end{cases}$$

9. **Határozzuk meg az $f(t) = e^{-j\omega t}$ jel Laplace transzformáltját!**
Az $f(t)$ jel egy exponenciális jel, amelynek argumentuma a komplex értékű $j\omega$. Ezért az $e^{-\alpha t}$-ra vonatkozó trnaszformációs összefüggést alkalmazhatjuk $\alpha = j\omega$ helyettesítéssel.

$$\mathscr{L}\left\{e^{-j\omega t}\right\} = \frac{1}{s + j\omega}$$

10. **Határozzuk meg az $f(t) = e^{j\omega t}$ jel Laplace transzformáltját!**
Hasonlóan az előző feladathoz, csak $\alpha = -j\omega$ helyettesítés szükséges

$$\mathscr{L}\left\{e^{j\omega t}\right\} = \frac{1}{s - j\omega}$$

11. **Határozzuk meg az $f(t) = \cos(\omega t)$ és az $f(t) = \sin(\omega t)$ jelek Laplace transzformáltját!**
Az Euler-összefüggés

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \text{ és } \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

felhasználásával kapjuk $\cos(\omega t)\varepsilon(t)$ Laplace-transzformáltjára

$$\mathscr{L}\left\{\cos(\omega t)\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{s + j\omega + s - j\omega}{2(s + j\omega)(s - j\omega)} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

illetve $\sin(\omega t)\varepsilon(t)$ Laplace-transzformáltja

$$\mathscr{L}\left\{\sin(\omega t)\right\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \frac{s + j\omega - (s - j\omega)}{2j(s + j\omega)(s - j\omega)} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

12. **Határozzuk meg az $f(t) = t\varepsilon(t)$ jel Laplace-transzformáltját!**
A definíciós integrál alkalmazásával

$$\mathscr{L}\left\{t\varepsilon(t)\right\} = \int_{-0}^{\infty} te^{-st}dt$$

Az integrál kiszámítása a parciális integrálás módszerével a legkönnyebb :

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \longrightarrow \int_a^b (fg') = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b (f'g) \tag{1.1.3}$$

Válasszuk f és g változót az alábbi módon : $f = t$ és $g' = e^{-st}$. Ekkor $f' = 1$ és $g = e^{-st}/(-s)$ a két másik változó. /Belátható, hogy az ellenkező választás esetén az kiszámítandó integrál nem egyszerűsödik./ A Laplace-transzformált :

$$\int_{-0}^{\infty} te^{-st}dt = \left[\frac{t \cdot e^{-st}}{-s}\right]_{-0}^{\infty} - \int_{-0}^{\infty} 1\frac{e^{-st}}{-s}\,dt = 0 - 0 - \frac{1}{-s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{-0}^{\infty} = -\frac{0-1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

1.1.2. Gyakorló feladatok - kitűzött problémák

Esetleg nehezebb vagy több számolást igénylő feladatok kerültek ide.

1. **Számítsa ki az alábbi jel Laplace-transzformáltját!**

$$\boldsymbol{f(t) = \varepsilon(t)\ t\ e^{-\alpha t}}$$

2. **Számítsa ki az alábbi jel Laplace-transzformáltját!**

$$\boldsymbol{f(t) = \varepsilon(t)\ t^2}$$

3. **Adjon általános képletet az alábbi jel Laplace-transzformáljára!**

$$\boldsymbol{f(t) = \varepsilon(t)\ t^n}$$

4. **Adja meg az alábbi $2T$ hosszuságú jel Laplace-transzformáltját!**

$$\boldsymbol{f(t) = \varepsilon(t)(U_0+U_0e^{-\alpha t})-U_0\varepsilon(t-T)(2+e^{-\alpha t}+e^{-\alpha(t-T)})+U_0\varepsilon(t-2T)(1+e^{-\alpha(t-T)})}$$

Transzformáljunk tagonként, majd adjuk össze a kapott tagokat :

$$\mathscr{L}\left\{\varepsilon(t)(U_0+U_0e^{-\alpha t})\right\} = U_0\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\alpha}\right) = U_0\frac{2s+\alpha}{s(s+\alpha)}$$

$$\mathscr{L}\left\{U_0\varepsilon(t-T)(2+e^{-\alpha t}+e^{-\alpha(t-T)})\right\} = U_0e^{-sT}\left(\frac{2}{s}+\frac{e^{-\alpha T}}{s+\alpha}+\frac{1}{s+\alpha}\right) = U_0e^{-sT}\frac{s(3+e^{-\alpha T})+\alpha}{s(s+\alpha)}$$

$$\mathscr{L}\left\{U_0\varepsilon(t-2T)(1+e^{-\alpha(t-T)})\right\} = U_0e^{-s2T}\left(\frac{1}{s}+\frac{e^{-\alpha T}}{s+\alpha}\right) = U_0e^{-s2T}\frac{s(1+e^{-\alpha T})+\alpha}{s(s+\alpha)}$$

Összeadva a tagokat :

$$F(s) = \frac{U_0}{s(s+\alpha)}\left(2s-s(3+e^{-\alpha T})e^{-sT}+s(1+e^{-\alpha T})e^{-s2T}+\alpha(1-e^{-sT}+e^{-s2T})\right)$$

Megjegyzés : Az α paraméter értelmezése alapján egy τ időmértékegységű jellemző rendelhető hozzá $\alpha = 1/\tau$ módon. Az $e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$ exponenciális függvény "megfelelő" mértékben 0-hoz közeli 3 τ idő után (ekkor 5%-os az eltérése 0-tól. Vizsgáljuk meg mi történik, ha $T > 5\cdot\tau$ feltétel teljesül?

A Laplace-transzformáltat átírva τ megközelítés alapján ($\xi = T/\tau$ azaz $T = \xi\cdot\tau$)

$$\alpha\cdot T = \frac{1}{\tau}\cdot\xi\tau = \xi$$

alkalmazva ezt

$$F(s) = \frac{U_0}{s(s+\alpha)}\left(2s-s(3+e^{-\xi})e^{-sT}+s(1+e^{-\xi})e^{-s2T}+\alpha(1-e^{-sT}+e^{-s2T})\right)$$

1.2. Inverz Laplace-transzformáció

1.2.1. Elméleti alap

Az **inverz Laplace-transzformáció**ra létezik egy általános inverz képlet. Ennek használata, azonban nem egyszerű. Az "egyszerű", gyakorlatban előforduló esetekben azonban a részlettörtekre bontás módszerét és általánosítását lehet egyszerűen és hatékonyan alkalmazni.

Mindenek előtt tisztázni kell, hogy az **inverz Laplace-transzformáció** is lineáris művelet, azaz a szuperpozíció elve érvényes rá.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{aF(s)+bG(s)\right\} = a\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} + b\mathscr{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} = a\cdot f(t) + b\cdot g(t)$$

ahol $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$ és $g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}$ a megfelelő inverz transzformáltak.

Általánosságban racionális törtfüggvények visszatranszformálásával akad dolgunk. Ezek esetében először valódi racionális törtfügvényé kell alakítani a törtfüggvényt polinomosztás segítségével. Így elmondhatjuk (hogy a gyakorlatban előforduló esetekben) a kapott alak a következő lesz :

$$F(s) = A + \frac{M(s)}{N(s)} \tag{1.2.1}$$

ahol A konstans, $M(s)$ és $N(s)$ polinomok s-ben.

$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \text{ és } N(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0 \tag{1.2.2}$$

alapján a valódi racionális törtfüggvény esetén $m < n$.

Az (1.2.1) egyenletből a konstans visszatranszformálva $A\cdot\delta(t)$.

A valódi racionális törtfüggvény visszatranszformálásának lépései :

1. Nevező gyökeinek meghatározása
2. Részlettörtekre bontás
3. Részlettörtek visszatranszformálása egyenként

A nevező gyökeinek (a függvény pólusainak) ismeretében lehet megmondani a részléttörtekre bontáshoz szükséges gyöktényezős felbontást. A pólusok az alábbiak lehetnek (figyelembe véve, hogy valós együtthatójú n-ed fokú egyenlet megoldásával kapjuk) :

1. p_i – Valós, egyszeres gyök
$$\frac{A}{s-p_i}$$
2. p_i – Valós, k-szoros gyök
$$\sum_{j=1}^{k}\frac{A_j}{s-p_i}$$
3. p_i, p_{i+1} – Komplex, konjugált gyökpár
$$\frac{As+B}{(s-p_i)(s-p_{i+1})}$$

1.2.2. Példa feladatok

1. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\mathscr{L}^{\mathbf{-1}}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s+a}}\right\} = \varepsilon(t)\cdot e^{-a\cdot t} \tag{1.2.3}$$

2. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\mathscr{L}^{\mathbf{-1}}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(s+a)(s+b)}}\right\} \boldsymbol{=?}$$

Tegyük fel, hogy $a \neq b$, akkor

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{-a+b}}{s+a}+\frac{\frac{1}{-b+a}}{s+b}\right\} = \frac{1}{b-a}\varepsilon(t)\cdot\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$$

Ha $a = b$ akkor a következő feladatot kapjuk.

3. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\mathscr{L}^{\mathbf{-1}}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2+2as+a^2}}\right\} \boldsymbol{=?}$$

A nevező gyökei (pólusok) : $p_{1,2} = a$. A két pólus egyenlő és valós értékű.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2as+a^2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2}\right\} = \varepsilon(t)t\cdot e^{-at} \tag{1.2.4}$$

4. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\alpha-j\omega_0)(s+\alpha+j\omega_0)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2\alpha s+(\alpha^2+\omega_0^2)}\right\} =$$

A visszatrnaszformálandó jel részlettörtekre bontott alakja :

$$F(s) = \frac{A_1}{s+\alpha-j\omega_0}+\frac{A_2}{s+\alpha+j\omega_0}$$

Az együtthatók kiszámíthatóak a "takargatásos módszer" alkalmazásával.

$$A_1 = \left.\frac{1}{s+\alpha+j\omega_0}\right|_{s=-\alpha+j\omega_0} = \frac{1}{-\alpha+j\omega_0+\alpha+j\omega_0} = \frac{1}{2j\omega_0} = \frac{-j}{2\omega_0}$$

$$A_2 = \left.\frac{1}{s+\alpha-j\omega_0}\right|_{s=-\alpha-j\omega_0} = \frac{1}{-\alpha-j\omega_0+\alpha-j\omega_0} = \frac{1}{-2j\omega_0} = \frac{j}{2\omega_0}$$

$$f(t) = \varepsilon(t)\left(\frac{1}{2j\omega_0}e^{-\alpha t}e^{j\omega_0 t}+\frac{-1}{2j\omega_0}e^{\alpha t}e^{-j\omega_0 t}\right) = \varepsilon(t)\frac{e^{-\alpha t}}{\omega_0}\left(\frac{e^{j\omega_0 t}}{2j}-\frac{e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right) = \varepsilon(t)\frac{e^{-\alpha t}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

5. **Adja meg az általános alakú függvény inverz Laplace-transzformáltját!**

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{B\ s + C}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \omega_0^2)}} \qquad \text{ahol} \qquad \boldsymbol{\omega_0 > 0}$$

$F(s)$ általános alakja :

$$F(s) = \frac{A_1}{s + \alpha - j\omega_0} + \frac{A_2}{s + \alpha + j\omega_0}$$

Az együtthatók :

$$A_1 = \frac{(-\alpha + j\omega_0)B + C}{-\alpha + j\omega_0 + \alpha + j\omega_0} = \frac{C - \alpha B + jB\omega_0}{2j\omega_0} = \frac{B\omega_0 - j(C - \alpha B)}{2\omega_0} = \frac{B}{2} - j\frac{C - \alpha B}{2\omega_0}$$

és

$$A_2 = \frac{(-\alpha - j\omega_0)B + C}{-\alpha - j\omega_0 + \alpha - j\omega_0} = \frac{-C + \alpha B + jB\omega_0}{2j\omega_0} = \frac{B\omega_0 + j(C - \alpha B)}{2\omega_0} = \frac{B}{2} + j\frac{C - \alpha B}{2\omega_0}$$

A számítás folyamán nem alkalmaztunk semmilyen megszorítást, ezért a kapott eredményből levonhatjuk az általános következtetést, hogy az ilyen esetben adódó együtthatók egymás komplex konjugáltjai. Mindezt figyelembe véve az inverz transzformáltra kapjuk ($\gamma = B/2$ és $\xi = (C - \alpha B)/(2\omega_0)$ helyettesítésel)

$$(\gamma - j\xi)e^{-\alpha t + j\omega_0 t} + (\gamma + j\xi)e^{-\alpha t - j\omega_0 t} = e^{-\alpha t}(\gamma e^{j\omega_0 t} + \gamma e^{-j\omega_0 t}) + \frac{e^{-\alpha t}\xi}{j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$$

innen

$$\gamma\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{B}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = B \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$\frac{\xi\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)}{j} = \frac{C - \alpha B}{\omega_0}\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \frac{C - \alpha B}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Összegezve az eredményeket

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{B\ s + C}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \omega_0^2)}\right\} = \varepsilon(t)\ e^{-\alpha t}\left(B \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{C - \alpha B}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)\right) \tag{1.2.5}$$

6. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\boldsymbol{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}\right\} =?}$$

A pólusok : $p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$. A pólusok $p_1 = -1$ és $p_2 = -2$. Így a részlettörtekre bontás és a tagonkénti inverz transzformáció könnyen elvégezhető :

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{-1+3}{-1+2}}{s + 1} + \frac{\frac{-2+3}{-2+1}}{s + 2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s + 1} + \frac{-1}{s + 2}\right\} = \varepsilon(t)\left(2e^{-t} - e^{-2t}\right) \tag{1.2.6}$$

7. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\boldsymbol{s+2}}{\boldsymbol{s^2+5s+6}}\right\} = ?$$

A pólusok $p_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{-5 \pm 1}{2}$, azaz $p_1 = -2$ és $p_2 = -3$. Látható, hogy a nevező egyik gyöke és a nevező egyik gyöke azonosak -2, ezért "kiejtik" egymást. Így egy egyszerűbb kifejezést kell transzformálni :

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)(s+3)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \varepsilon(t)\; e^{-3\,t}. \tag{1.2.7}$$

8. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\boldsymbol{s^2+2s+3}}{\boldsymbol{s^2+3s+2}}\right\} = ?$$

Első lépésként valódi racionális törtfüggvényé kell alakítani a kifejezését, amelyet polinomosztással lehet elérni. Ennek eredményeként :

$$\begin{aligned}\frac{s^2+2s+3}{s^2+3s+2} = 1 + \frac{-s+1}{s^2+3s+2} = 1 - \frac{s-1}{(s+2)(s+1)} &= \\ = 1 - \left(\frac{\frac{-2-1}{-2+1}}{s+2} + \frac{\frac{-1-1}{-1+2}}{s+1}\right) &= 1 - \left(\frac{3}{s+2} + \frac{-2}{s+1}\right)\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Innen az inverz transzformált :

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{s^2+3s+2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{1 - \left(\frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}\right)\right\} = \delta(t) - \varepsilon(t)\; 3e^{-2t} + \varepsilon(t)\; 2e^{-t} \tag{1.2.9}$$

9. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\boldsymbol{s+2}}{\boldsymbol{s+1}}\right\} = ?$$

Elvégezve a polinomosztást :

$$\frac{s+2}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1}$$

Ebből az inverz tramszformált :

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s+1}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{1 + \frac{1}{s+1}\right\} = \delta(t) + \;\varepsilon(t)\; e^{-t} \tag{1.2.10}$$

10. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+2}{s^2+2s+1}\right\}=?$$

A polinomosztás eredménye :

$$\frac{s^2+2s+2}{s^2+2s+1}=1+\frac{1}{s^2+2s+1}=1+\frac{1}{(s+1)(s+2)}=1+\frac{\frac{1}{-1+2}}{s+1}+\frac{\frac{1}{-2+1}}{s+2}=1+\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2} \quad (1.2.11)$$

Innen tagonként könnyen elvégezhetően az inverz transzformált :

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+2}{s^2+2s+1}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{1+\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}\right\}=\delta(t)+\varepsilon(t)\ e^{-t}-\varepsilon(t)\ e^{-2t} \quad (1.2.12)$$

11. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s+1}\right\}=?$$

Az e^{-sT} tag időeltolást jelent, ezért ezen tagok szerint kell szétszedni és tagonként transzformálni a tagokat, vigyázva az időeltolást tartalmazó tagoknál az argumentumra.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s+1}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{e^{-sT}}{s+1}\right\}=\varepsilon(t)e^{-t}-\varepsilon(t-T)\ e^{-(t-T)} \quad (1.2.13)$$

12. **Adja meg az alábbi függvény inverz Laplace-transzformáltját!**

$$F(s)=\frac{s-e^{-sT}}{s+1}$$

$$F(s)=\frac{s}{s+1}-\frac{e^{-sT}}{s+1}=1-\frac{1}{s+1}-\frac{e^{-sT}}{s+1}$$

innen tagonként elvégezve a transzformációt utána összegezve az eredményt

$$f(t)=\delta(t)-\varepsilon(t)e^{-t}-\varepsilon(t-T)e^{-(t-T)}$$

13. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=?$$

A pólusok $p_{1,2}=\pm\sqrt{-1}=\pm j$, a nevező gyöktényezős felbontása : $s^2+1=(s+j)(s-j)$. Figyelembe véve ezt a részlettörtekre bontott alak a következő :

$$F(s)=\frac{\frac{1}{-j-j}}{s+j}+\frac{\frac{1}{j+j}}{s-j}=\frac{1}{-2j}\frac{1}{s+j}+\frac{1}{2j}\frac{1}{s-j}$$

Az inverz transzformált kifejezése

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \frac{1}{2j}\left(e^{j\ t} - e^{-j\ t}\right) = \cos(t)\varepsilon(t)$$

Megjegyzés : Ellenőrízhetjük számításunkat, ha észrevesszük, hogy

$$\mathscr{L}\left\{\cos(\omega_0 t)\right\} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

amiből $\omega_0 = 1$ alapján éppen a transzformálandó komplex függvényt kapjuk.

Megjegyzés : Alkalmazható lett volna az (1.2.5) összefüggés is,

$$\alpha = 0,\ \omega_0 = 1,\ B = 0,\ C = 1$$

paraméterekkel. Ekkor kapjuk

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \varepsilon(t)e^{-0\ t}\left(0\cdot\cos(1\cdot t) + \frac{1-0}{1}\sin(1\cdot t)\right) = \varepsilon(t)\sin(t)$$

14. **Végezze el az alábbi inverz Laplace-transzformációt!**

$$\boldsymbol{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\cdot(s+1)}\right\} =?}$$

Részlettörtekre bontással kapjuk

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{\frac{1}{0+1}}{s} + \frac{\frac{1}{-1}}{s+1} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1}$$

innen az időtartománmybeli jel

$$f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t)e^{-t}$$

1.2.3. Ajánlott feladatok az inverz Laplace-transzformáció témaköréből

Határozza meg az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltját!

i.

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{s-1}{s(s+a)}}$$

$$F(s) = \frac{\frac{0-1}{0+a}}{s} + \frac{\frac{-a-1}{-a}}{s+a} = \frac{1}{a}\left(\frac{-1}{s} + \frac{1+a}{s+a}\right)$$

$$f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{a}\left(-1 + (1+a)e^{-at}\right)$$

ii.

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{s+b}{s(s+a)}}$$

Ha $a = b$ akkor

$$F(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow f(t) = \varepsilon(t)$$

Ha $a \neq b$ akkor

$$F(s) = \frac{\frac{b}{a}}{s} + \frac{\frac{b-a}{-a}}{s+a} = \frac{1}{a}\left(\frac{b}{s} + \frac{a-b}{s+a}\right)$$

$$f(t) = \varepsilon(t)\frac{b + (a-b)e^{-at}}{a}$$

iii.

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}}$$

iv.

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{s+c}{(s+a)(s+b)}}$$

- Ha $c = a \neq b$ akkor

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+b}\right\} = \varepsilon(t)e^{-bt}$$

- Ha $c = b \neq a$ akkor

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \varepsilon(t)e^{-at}$$

- Ha $c \neq b$ és $c \neq a$ akkor
  ha $a = b$ then

$$F(s) = \frac{s+c}{(s+a)^2} = \frac{A_1}{s+a} + \frac{A_2}{(s+a)^2} = \frac{A_1(s+a) + A_2}{(s+a)^2}$$

innen

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_1 a + A_2 &= c \end{aligned}\right\} \begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_2 &= c - a \end{aligned}$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a} + \frac{c-a}{(s+a)^2}\right\} = \varepsilon(t)e^{-at} + \varepsilon(t)(c-a)te^{-at}$$

ha $a \neq b$ akkor

$$F(s) = \frac{\frac{-a+c}{-a+b}}{s+a} + \frac{\frac{-b+c}{-b+a}}{s+b} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a-c}{s+a} + \frac{c-b}{s+b}\right)$$

$$f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{a-b}\left((a-c)e^{-at} + (b-c)e^{-bt}\right)$$

v.

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{(s+a)(s+b)}}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} + \frac{-e^{-sT}}{(s+a)(s+b)} = \frac{1/(b-a)}{s+a} + \frac{-1/(b-a)}{s+b} - \frac{e^{-sT}/(b-a)}{s+a} + \frac{e^{-sT}/(b-a)}{s+b}$$

$$f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right) - \frac{\varepsilon(t)}{b-a}\left(e^{-a(t-T)} - e^{-b(t-T)}\right)$$

vi.

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{s^2 - e^{-sT}\cdot s}{s^2 + 3s + 2}}$$

$$F(s) = F_1(s) - F_2(s) = \frac{s^2}{s^2+3s+2} - \frac{e^{-sT}s}{s^2+3s+2}$$

$$F_1(s) = 1 - \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = 1 - \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)} = 1 - \frac{-1}{s+1} - \frac{4}{s+2}$$

$$F_2(s) = e^{-sT}\left(\frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right)$$

$$f(t) = \delta(t) + \varepsilon(t)e^{-t} - 4\varepsilon(t)e^{-2t} + \varepsilon(t-T)e^{-(t-T)} - \varepsilon(t-T)e^{-2(t-T)}$$

vii.

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{\omega_0(1 - e^{-sT/2})}{(1 - e^{-sT})(\omega_0^2 + s^2)}}$$

Vegyük észre, hogy a nevezőben lévő $(1 - e^{-sT})$ tag azt jelenti, hogy a függvény "maradék" része egy periodikus jel egyetlen periódusát írja le. Ezért az egész függvény egy T periódusú jel.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_0(1 - e^{-sT/2})}{s^2 + \omega_0^2}\right\} = f_T(t)$$

$$f_T(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-sT/2}\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right\} = \varepsilon(t)\cos(\omega_0 t) - \varepsilon(t - T/2)\cos(\omega_0(t - T/2))$$

Azaz $F(s)$ inverz transzformáltja egy féloldalasan egyenirányított koszinusz jel.

1.3. Hálózátszámítás Laplace-transzformációval

1.3.1. Laplace-transzformáció és differenciál egyenletrendszer

Laplace-transzformációval történő hálózatszámítás során kihasználjuk, hogy a differenciál-egyenletekből illetve differenciálegyenlet rendszerekből a transzformáció segítségével algebrai egyenletet illetve egyenletrendszert kapunk. Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása természetesen sokkal egyszerűbb elvégezhető, mint a differenciálegyenlet(ek)é.

Tekintsük az alábbi egyenletrendszert! Ez egy (tetszőleges) rendszer állapotváltozós leírásakent is tekinthető. Az állapotváltozók $x_1(t)$ és $x_2(t)$, amelyek a t időtől függenek explicite. A keresett válasz $y(t)$, a (külső) gerjesztés (forrás) $s(t)$.

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + 4x_2 + s \\ x_2' &= 3x_1 - 3x_2 - s \\ y &= x_1 + 5x_2 + 3s \end{aligned}\right\} \tag{1.3.1}$$

Laplace-transzformáljuk az (1.3.1) egyenletet. A transzformált változók $X_1(s)$, $X_2(s)$, $Y(s)$ és a gerjesztés $S(s)$.

$$\left.\begin{aligned} sX_1(s) - x_1(-0) &= -2X_1(s) + 4X_2(s) \quad &+S(s) \\ sX_2(s) - x_2(-0) &= 3X_1(s) - 3X_2(s) \quad &-S(s) \\ Y(s) &= X_1(s) + 5X_2(s) \quad &+3S(s) \end{aligned}\right\} \tag{1.3.2}$$

Tegyük fel ebben az esetben, hogy a rendszer energiamentes $t < 0$ intervallumban, ezért a változók értéke $t = -0$ pillanatban zérus lesz ($x_1(-0) = 0$ illetve $x_2(-0) = 0$), így (1.3.2) egyszerűsödik. /Ha az energiamentesség nem áll fenn, akkor sincsen probléma, csak a kifejezések lesznek kicsivel bonyolultabbak./

$$\left.\begin{aligned} sX_1(s) &= -2X_1(s) + 4X_2(s) \quad &+S(s) \\ sX_2(s) &= 3X_1(s) - 3X_2(s) \quad &-S(s) \\ Y(s) &= X_1(s) + 5X_2(s) \quad &+3S(s) \end{aligned}\right\} \tag{1.3.3}$$

Az esetek többségében az állapotváltozók számunkra érdektelenek, csak a gerjesztés és a válasz közötti gerjesztést keressük. Ezért az egyenletrendszer első két egyenletéből fejezzük ki $X_1(s)$-et és $X_2(s)$-t.

$$X_1(s+2) = 4X_2 + S \Longrightarrow X_1 = \frac{X_2 + S}{s+2}$$

$$X_2(s+3) = 3X_1 - S = 3\frac{X_2 + S}{s+2} - S \rightarrow X_2(s+3)(s+2) - 3 = S(3 - s - 2) = S(1 - s)$$

$$X_2 = \frac{S(1-s)}{s^2+5s+3}; \qquad X_1 = S\frac{\frac{1-s}{s^2+5s+3} + 1}{s+2} = S\frac{1 - s + s^2 + 5s + 3}{(s+2)(s^2+5s+3)} = S\frac{s^2+4s+4}{s^3+7s^2+13s+6}$$

Ezután a választ kifejezhetjük az állapotváltozók helyér beírva azok gerjesztéssel kapott alakját.

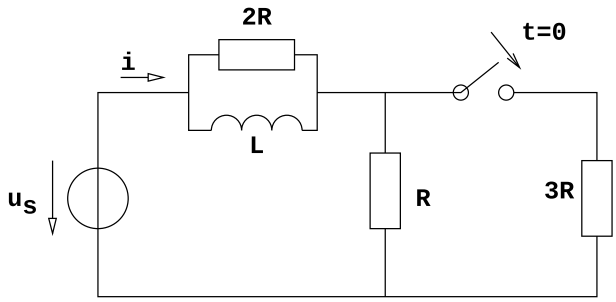
$$Y = S\frac{1-s}{s^2+5s+3} + 5S\frac{s^2+4s+4}{(s+2)(s^2+5s+3)} + 3S = S\frac{(1-s)(s+2)+5(s^2+4s+4)+3(s+2)(s^2+5s+3)}{(s+2)(s^2+5s+3)} = S\frac{3s^3+25s^2+58s+40}{s^3+7s^2+13s+6} \quad (1.3.4)$$

1.3.2. Példák és feladatok

H1. Az alábbi ábrán látható hálózatban a kapcsolót a $t = 0$ pillanatban zárjuk.

a. Határozzuk meg a bejelölt i áram időbeli változását a $t = 0$ pillanatokra, ha a kapcsoló zárása előtt a hálózat állandósult állapotban volt.

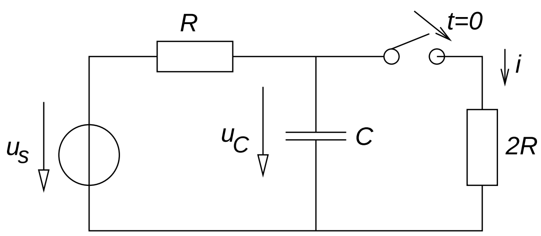
b. Határozzuk meg az i áram ugrását a $t = 0$ pillanatban!



1.1. ábra.

H2. Oldjuk meg az előző feladatot arra az esetre, ha az eredetileg zárt kapcsolót a $t = 0$ pillanatban kinyitjuk.

H3. Határozzuk az alábbi ábrán bejelölt áram $i(t)$ időfüggvényét, valamint a kondenzátor $u_C(t)$ feszültségének időfüggvényét Laplace-transzformáció segítségével.



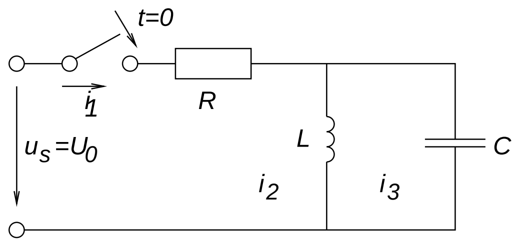
1.2. ábra.

H4. Az alábbi ábrán látható, kezdetben energiamentes hálózatra a $t = 0$ pillanatban $U_0 = 125\ V$ egyenfeszültséget kapcsolunk. Határozzuk meg és ábrázoljuk a kondenzátor feszültségének $u_C(t)$ időfüggvényét az alábbi adatok esetén :

a) $R = 250\ \Omega$, $L = 667mH$, $C = 2mF$

b) $R = 100\ \Omega$, $L = 40\ nH$, $C = 1\mu F$

c) $R = 100\ \Omega$, $L = 40\ nH$, $C = 5\mu F$



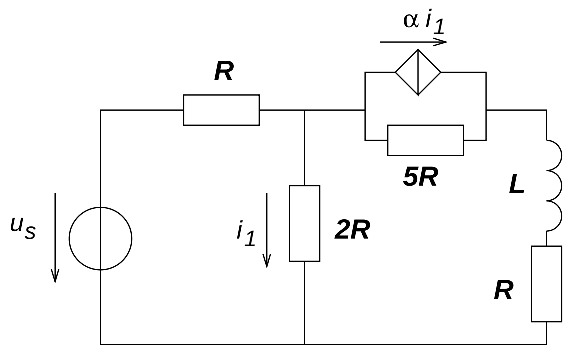
1.3. ábra.

H5. Az alábbi ábrán látható, vezérelt forrást tartalmazó hálózatban

$$u_s(t) = U_0 \left(1 - \frac{2t}{T}\right) \cdot (\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T))$$

a) Határozzuk meg a bejelölt áram $i_1(t)$ időfüggvényét.

b) Az α paraméter mely értéktartományában stabilis a hálózat?



1.4. ábra.

H6. Adott egy hálózat feszültségátvitelre vonatkozó átmeneti függvénye :

$$v(t) = \varepsilon(t) \left[e^{-2t} + 2e^{-3t} - e^{-4t}\right]; \qquad [t] = s$$

a) Határozzuk meg a hálózat átviteli függvényét.

b) Határozzuk meg a hálózat súlyfüggvényét.

c) Írjuk fel a kimenőjel kifejezését adott $u_1(t)$ bemenőjel esetén.

d) Határozzuk meg a kimenőjel időfüggvényét, ha a bemenőjel

$$u_1(t) = 10\left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - 4)\right]; \qquad [u] = V.$$

H7. Egy hálózat bemeneti jele u_1, kimeneti jele az u_2 feszültség. A hálózat súlyfüggvénye

$$w(t) = \delta(t) - \varepsilon(t)\left[4e^{-4t} + e^{-t}\right]; \quad [t] = ms, \quad [w] = ms^{-1}$$

a) Határozzuk meg a hálózat átmeneti függvényét!

b) Írjuk fel a hálózat feszültségátviteli függvényét, vázoljuk a pólus-zérus elrendezést.

Tartalomjegyzék